◆ ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ ◆

Дорогие читатели!

В этом номере журнала мы решили запустить новую рубрику. Хотя идея организовать нечто подобное носилась в воздухе уже довольно давно, рубрика оформилась во многом благодаря случайности. Все началось с нашего уже ставшего традиционным онлайн-семинара, на котором с согласия авторов обсуждаются статьи, опубликованные на страницах журнала.

В тот раз дискуссия, развернувшаяся вокруг работы А.И. Машошина и А.В. Гриненкова «Алгоритм определения координат и параметров движения подводного источника шумоизлучения без специального маневрирования наблюдателя», началась еще до самого семинара. Оппонентом выступил к.ф.-м.н. Н.Н. Василюк (кстати, наш постоянный автор), который не просто обратился в редакцию с вопросами и комментариями, а написал, по сути, целую рецензию. На семинаре к дискуссии присоединились и другие участники. По результатам состоявшегося обсуждения Н.Н. Василюк прислал еще более развернутый отзыв, по объему уже сопоставимый с полноценной статьей. Авторы дали на него подробный ответ. Мы публикуем эти материалы полностью и будем рады, если читатели примут активное участие как в онлайн-семинарах журнала, информацию о которых можно найти на нашем сайте, так и в обсуждении опубликованных в нашем издании статей в рамках предлагаемой новой рубрики.

Н. Н. ВАСИЛЮК

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Введение

Вначале хочу поблагодарить редколлегию и редакцию журнала «Гироскопия и навигация» за организацию семинаров по статьям, опубликованным на страницах издания. Я далек от вопросов гидролокации и, если бы не семинар, прошедший 19 сентября 2024 г., не прочитал бы статью А.В. Гриненкова и А.И. Машошина «Алгоритм определения координат и параметров движения подводного источника шумоизлучения без специального маневрирования наблюдателя». Далее по тексту ссылка на эту статью будет обозначаться как [1] по ее номеру в списке литературы.

Вводная и постановочная части статьи написаны великолепно. Даже непосвященным становится понятно, почему ведется глобальная охота за записями шумов винтов кораблей, а винты подводных лодок на парадных фотографиях закрывают брезентом. Однако математическое содержание статьи содержит ряд ошибок. Возможно, в статье изложен некий новый и интересный подход к оцениванию параметров движения морских объектов по их гидролокационным сигналам, но ошибки в печатном тексте затрудняют ее правильное понимание.

Основная причина проблем, возникших в этой статье, по моему мнению, в чрезмерном усложнении описания достаточно простого алгоритма совместной обработки измерений. Формула (25) [1], к которой авторы идут на протяжении семи страниц математического текста в разделе 1, используя метод максимального правдоподобия (ММП), представляет собой не что иное, как целевую функцию взвешенного метода наименьших квадратов (МНК).

Все модели измерений, описанные в статье, содержат статистически независимые нормально распределенные погрешности с нулевым математическим ожиданием. Известно [2, пример 4.4.2], что для такой модели измерений ММП и МНК эквивалентны. В разделе 1 достаточно было описать модели измерений (1)–(3) и (10)–(13) [1] и составить из этих моделей целевую функцию для МНК-оценивания параметров движения цели. После этого можно было бы перейти к более важным вопросам, составляющим смысловое содержание статьи. Вместо этого авторы начали явно выводить выражение для функции правдоподобия оцениваемых параметров и сделали на этом пути большое количество ошибок.

В функцию правдоподобия, полученную с ошибками, искусственно включено выражение (6) [1] для априорной плотности распределения скорости «цели класса ω». Скорость цели – это один из оцениваемых параметров. В рамках ММП это включение недопустимо. ММП не умеет работать с априорными плотностями распределения оцениваемых параметров движения цели. Он работает исключительно с результатами измерения величин, связанных с оцениваемыми параметрами через детерминированные функции.

Данное письмо является результатом переписки с авторами и обсуждения статьи на семинаре. Статья рассмотрена с точки зрения специалиста, слабо разбирающегося в подводной гидролокации, но знакомого с проблемами оптического и радиолокационного автосопровождения воздушных объектов. Структура письма следующая: сначала показывается, почему ММП не применим к решению задачи траекторного оценивания в постановке, предполагающей наличие априорных данных. Затем приводится пример использования ММП для решения той же задачи в постановке, из которой исключены априорные данные. И наконец, приводится список замечаний к опубликованному тексту статьи. По сути, это письмо можно рассматривать как открытую рецензию на уже опубликованную работу. Характер и содержание замечаний в этой рецензии соответствуют первому этапу рецензирования, который статья должна была пройти до публикации.

В тексте письма, где это возможно, используются понятия, обозначения, предположения и допущения, введенные авторами в [1]. Поэтому для правильного понимания замечаний необходимо сначала ознакомиться с текстом обсуждаемой статьи. В качестве теоретической основы для критического рассмотрения статьи используется монография [2].

1. Некорректный выбор ММП для решения задачи в полной постановке

В обсуждаемой статье ставится задача определить параметры прямолинейного и равномерного движения наблюдаемой морской цели: скорость цели V, курс цели K и дальность цели R_j в некоторый известный момент времени t_j. Подвижный наблюдатель не может измерить эти параметры, но он может попытаться оценить их значения за счет совместной обработки других параметров движения цели, доступных для измерения, и некоторой априорной информации о классе цели. Искомые параметры предлагается оценивать путем совместной обработки следующих наборов данных:

1) набора $\hat{P}_1, \hat{P}_2, ... \hat{P}_N$ из N значений пеленга цели, измеренных в различные моменты времени t_1, t_2, … t_N. Погрешности ΔP_i, $i = 1,…N$, измерения имеют нормальную плотность распределения $g_{\Delta P_i}(x)$ с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением (СКО) σ_{P_i} (2) [1];
2) математического ожидания $m_{V/\omega}$ и СКО $\sigma_{V/\omega}$ нормального распределения $g_{V/\omega}(x)$ скорости «цели класса ω», полученных из априорной информации о классах возможных целей в районе патрулирования наблюдателя. Для параметров распределения $g_{V/\omega}(x)$ имеются два набора обозначений: $m_{V/\omega} \equiv mV_\omega$ и $\sigma_{V/\omega} \equiv sV_\omega$;
3) набора $\hat{W}_1, \hat{W}_2, ... \hat{W}_M$ логарифмических значений уровня сигнала от цели, измеренных наблюдателем в M различных частотных диапазонах. Погрешности измерения уровня сигнала ΔW_k, $k = 1…M$, имеют нормальное распределение $g_{\Delta W_k}(x)$ с нулевым математическим ожиданием и СКО $\sigma_{\Delta W_k}$, $k = 1…M$, вычисляемым согласно (11) [1].

Для совместной обработки этих наборов измерений и получения оценок искомых параметров движения цели в опубликованной статье предлагается использовать ММП.

Проблема применения ММП для решения этой задачи состоит в п.2, в котором задана априорная плотность распределения одного из оцениваемых параметров. ММП не предназначен для работы с таким типом исходных данных: априорная плотность избыточна для ММП, она в нем никак не используется. Поэтому, если для решения задачи применяется ММП, п.2 из исходных данных надо исключить. Если же априорная плотность $g_{V/\omega}(x)$ важна для оценки, нужно отказаться от ММП и оценивать параметры другими методами. Покажем это на простом примере с использованием системы обозначений, принятой в теории байесовского оценивания, например [3].

Пусть нужно оценить значение параметра x, для которого известна априорная плотность распределения $f(x)$ по набору $y_1,…y_N$ из N значений $y_i = x + v_i$, где $i = 1…N$, v_i – независимые случайные величины с одинаковой плотностью распределения $w(v)$. Совместная плотность распределения компонент вектора $\mathbf{y} = [y_1 y_2 \dots y_N]^T$, условная к x:

$$f(\mathbf{y} \mid x) = \prod_{i=1}^{N} w(y_i - x).$$

Функция правдоподобия для оцениваемого значения x:

$$L(x|\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}|x).$$

Отсюда видно, что априорная плотность распределения $f(x)$ может быть любой: она никак не влияет на вид функции правдоподобия. Если исключить $f(x)$ из рассмотрения, вид функции правдоподобия также не изменится.

Если требуется учесть $f(x)$ при оценивании величины x, нужно отказаться от ММП и использовать другие методы, например байесовские. В этих методах плотность $f(x)$ учитывается в оценке пусть непростым, но естественным образом. Разложим совместную плотность $f(\mathbf{y},x)$ по формуле Байеса:

$$f(\mathbf{y}, x) = f(\mathbf{y}|x)f(x) = f(x|\mathbf{y})\, f(\mathbf{y}).$$

Отсюда апостериорная плотность оцениваемого параметра:

$$f(x\,|\,\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}\,|\,x)f(x)}{f(\mathbf{y})} = \frac{f(\mathbf{y}\,|\,x)f(x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{y}\,|\,x)f(x)\,dx} = \frac{f(x)\prod\limits_{i=1}^{N} w(y_i - x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\prod\limits_{i=1}^{N} w(y_i - x)}. \quad (1)$$

Используя $f(x|\mathbf{y})$, можно получать различные оценки параметра x, в которых учтена его априорная плотность распределения, например оценку $\hat{x}_{\min}(\mathbf{y})$ с минимальной среднеквадратичной ошибкой или оценку $\hat{x}_{\max}(\mathbf{y})$ с максимальной апостериорной вероятностью:

$$\hat{x}_{\min}(\mathbf{y}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f(x\,|\,\mathbf{y})\,dx,\ \ \hat{x}_{\max}(\mathbf{y}) = \arg\max_{x} f(x\,|\,\mathbf{y}).$$

2. Использование ММП для решения задачи в сокращенной постановке

2.1. Вывод совместных условных плотностей распределения

Здесь целесообразно привести вывод функции правдоподобия для исключенного п.2 исходных данных. Функция правдоподобия получается из совместной плотности распределения всех измеренных значений, условной к оцениваемым параметрам. Модель измерений пеленга на самом деле должна записываться не так, как в (1) [1], а в виде (замечание №2)

$$\hat{P}_i = P(t_i, K, V, R_j, P_j) + \Delta P_i\,.$$

Модель измерения логарифмических уровней сигнала для класса цели ω записывается как комбинация авторских формул (10), (12), (13), (20), (31) [1]:

$$\hat{W}_{k/\omega}(r) = \hat{P}_{0/\omega} + \hat{K}_{k/\omega}(r) + H_k + \Delta W_k - \Delta K_\omega - \Delta P_{0/\omega}\,, \quad (2)$$

где $\hat{P}_{0/\omega}$ – расчетное значение шумности цели (не путать с пеленгом цели P_i – у пеленгов индексация начинается с 1: $P_1, \ldots P_N$); $\hat{K}_{k/\omega}(r)$ – расчетное значение коэффициента передачи трассы распространения звука в частотном канале k как функция дальности цели r; H_k – коэффициент передачи приемного тракта в частотном канале k; ΔK_ω – погрешность расчета коэффициента передачи трассы, имеющая нормальное распределение $g_{\Delta K_\omega}(x)$ с нулевым средним и СКО $\sigma_{\Delta K_\omega}$; $\Delta P_{0/\omega}$ – погрешность расчета шумности цели, имеющая нормальное распределение $g_{\Delta P_{0/\omega}}(x)$ с нулевым средним и СКО $\sigma_{\Delta P_{0/\omega}}$.

В правой части (2) присутствует разность $\Delta W_k - \Delta K_\omega - \Delta P_{0/\omega}$ трех независимых нормально распределенных случайных величин с нулевым средним. Удобно ввести новую случайную величину (в статье ее нет)

$$\Delta\breve{W}_{k/\omega} = \Delta W_k - \Delta K_\omega - \Delta P_{0/\omega}\,.$$

Согласно (3.3.3) [2], эта случайная величина имеет нормальное распределение $g_{\Delta\breve{W}_{k/\omega}}(x)$ с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2_{\Delta\breve{W}_{k/\omega}} = \sigma^2_{\Delta W_k} + \sigma^2_{\Delta K_\omega} + \sigma^2_{\Delta P_{0/\omega}}$. Здесь используются авторские обозначения погрешностей ΔK_ω, $\Delta P_{0/\omega}$, но предполагается, что эти погрешности различны для различных частотных каналов приемника. Возможно, это предположение ошибочное (замечания 10 и 11). Далее будет использоваться вариант формулы (2) с новой случайной погрешностью:

$$\hat{W}_{k/\omega}(r) = \hat{P}_{0/\omega} + \hat{K}_{k/\omega}(r) + H_k + \Delta\breve{W}_{k/\omega}.$$

Теперь можно записать совместные плотности распределения для наборов однотипных измеренных значений. Для набора измерений углов пеленга эта плотность записана в (5) [1], условная к трем параметрам K, V, R_j. Здесь эта формула записывается условной к четырем параметрам (замечание №2):

$$g_{\hat{P}_1,\ldots\hat{P}_N/K,V,R_j,P_j}(p_1,\ldots p_N) = \prod_{i=1}^{N} g_{\Delta P_i}\left(p_i - P(t_i, K, V, R_j, P_j)\right).$$

Совместная плотность распределения измеренных логарифмических уровней сигнала записана в (16) [1]. Здесь записывается, по сути, та же самая плотность, но немного отличающаяся по форме за счет вновь введенного представления погрешности $\Delta\breve{W}_{k/\omega}$ и учета замечаний 10 и 11:

$$g_{\hat{W}_1,\ldots\hat{W}_M/\omega,R_j}(w_1,\ldots w_M) = \prod_{k=1}^{M} g_{\Delta\breve{W}_{k/\omega}}\left(w_k - \hat{P}_{0/\omega} - \hat{K}_{k/\omega}(R_j) - H_k\right). \tag{3}$$

2.2. Составление функции правдоподобия

Совместная плотность вероятности всех имеющихся результатов измерения, условная к оцениваемым параметрам:

$$\begin{aligned} &g_{\hat{P}_1,\ldots\hat{P}_N,\hat{W}_1,\ldots\hat{W}_M/\omega,K,V,R_j,P_j}(p_1,\ldots p_N, w_1,\ldots w_M) = \\ &\quad = g_{\hat{P}_1,\ldots\hat{P}_N/K,V,R_j,P_j}(p_1,\ldots p_N) \times g_{\hat{W}_1,\ldots\hat{W}_M/\omega,R_j}(w_1,\ldots w_M), \end{aligned} \tag{4}$$

где $p_1, \ldots p_N$ – аргументы, соответствующие измеренным значениям пеленга; $w_1, \ldots w_M$ – аргументы, соответствующие измеренным значениям логарифмического уровня сигнала. Такая плотность распределения записывается отдельно для каждого класса ω, который может появиться в районе патрулирования. Ближайшим аналогом этой плотности является (23) [1], в которой присутствуют некорректно введенная δ-функция (замечание №5), недопустимая плотность $g_{V/\omega}(x)$ (замечание №1) и пара искусственных параметров $R_{opt/\omega}$ и $\sigma_{opt/\omega}$.

Функция правдоподобия для класса цели ω получается из (4) за счет подстановки измеренных значений вместо аргументов плотности и объявления параметров K, V, R_j, P_j плотности аргументами новой функции [2, раздел 4.4]:

$$L_\omega(k,v,r,p \mid \hat{P}_1,\ldots\hat{P}_N,\hat{W}_1,\ldots\hat{W}_M) = g_{\hat{P}_1,\ldots\hat{P}_N,\hat{W}_1,\ldots\hat{W}_M/\omega,k,v,r,p}(\hat{P}_1,\ldots\hat{P}_N,\hat{W}_1,\ldots\hat{W}_M),$$

где k, v, r, p – действительные аргументы функции правдоподобия, соответствующие оцениваемым параметрам K, V, R_j, P_j.

Поскольку все сомножители в (4) нормальные, функцию правдоподобия удобно записать в форме логарифмической функции правдоподобия:

$$\begin{aligned} &l_\omega(k,v,r,p \mid \hat{P}_1,\ldots\hat{P}_N,\hat{W}_1,\ldots\hat{W}_M) = \\ &\quad = -\ln\left[L_\omega(k,v,r,p \mid \hat{P}_1,\ldots\hat{P}_N,\hat{W}_1,\ldots\hat{W}_M)\right] + const = \\ &\quad = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\hat{P}_i - P(t_i,k,v,r,p)\right)^2}{\sigma^2_{P_i}} + \sum_{k}^{N} \frac{\left(\hat{W}_k - \hat{P}_{0/\omega} - \hat{K}_{k/\omega}(r) - H_k\right)^2}{\sigma^2_{\Delta\breve{W}_{k/\omega}}}, \end{aligned} \tag{5}$$

где *const* – нормировочная постоянная.

Выражение (5) является целевой функцией для нахождения оценок искомых параметров движения цели, оптимальных в смысле максимального правдоподобия:

$$(\hat{K}_{opt},\hat{V}_{opt},\hat{R}_{opt/j},\hat{P}_{opt/j})=\arg\min_{k,v,r,p}\left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(\hat{P}_i-P(t_i,k,v,r,p)\right)^2}{\sigma_{P_i}^2}+\sum_{k=1}^{M}\frac{\left(\hat{W}_k-\hat{P}_{0/\omega}-\hat{K}_{k/\omega}(r)-H_k\right)^2}{\sigma_{\Delta\breve{W}_{k/\omega}}^2}\right\}. \tag{6}$$

В результате оптимизации (6) получаются значения трех полезных параметров $\hat{K}_{opt},\hat{V}_{opt},\hat{R}_{opt/j}$ и значение одного мешающего параметра $\hat{P}_{opt/j}$, который приходится оценивать, чтобы получить полезные параметры. Мешающие параметры часто встречаются в задачах оценивания. Например, в [4] для получения шести полезных параметров пришлось дополнительно оценивать порядка двухсот мешающих параметров.

В ходе обсуждения с авторами статьи выяснилось, что углы пеленга измеряются с очень высокой точностью – порядка долей углового градуса, многократно превышающей потребности задачи оценивания. Поэтому угол P_j можно из списка оцениваемых параметров исключить и просто подставить в (6) его измеренное значение $\hat{P}_j$. В этом случае задача оценивания становится квазиоптимальной, но упрощается, а целевая функция приводится к виду

$$\begin{gathered}(\hat{K}_{opt},\hat{V}_{opt},\hat{R}_{opt/j})=\\=\arg\min_{k,v,r}\left\{\sum_{i=1,i\neq j}^{N}\frac{\left(\hat{P}_i-P(t_i,k,v,r,\hat{P}_j)\right)^2}{\sigma_{P_i}^2}+\sum_{k=1}^{M}\frac{\left(\hat{W}_k-\hat{P}_{0/\omega}-\hat{K}_{k/\omega}(r)-H_k\right)^2}{\sigma_{\Delta\breve{W}_{k/\omega}}^2}\right\}.\end{gathered} \tag{7}$$

2.3. Обсуждение целевых функций

Ближайшим аналогом выражения (7) является (25) [1], в котором присутствует слагаемое $(v-m_{V/\omega})^2/\sigma_{V/\omega}^2$, недопустимое в ММП. Это слагаемое появилось при составлении (23) [1] после необоснованного умножения совместной плотности распределения измеренных значений на априорную плотность распределения $g_{V/\omega}(x)$. В ММП такое умножение не предусмотрено.

Наличие этого слагаемого в целевой функции (25) [1] приводит к «подтягиванию» оценки $\hat{V}_{opt}$ к априорному математическому ожиданию $m_{V/\omega}$ скорости цели, что влияет на оценки остальных параметров. Сила этого «подтягивания» зависит от весов отдельных слагаемых, т.е. от значения множителей $1/\sigma_{V/\omega}^2$, $1/\sigma_{P_i}^2$, $1/\sigma_{R_{opt/\omega}}^2$. Чем больше вес $1/\sigma_{V/\omega}^2$, тем сильнее оценки $\hat{K}_{opt},\hat{V}_{opt},\hat{R}_{opt/j}$ отклоняются от оценок максимального правдоподобия.

Кроме этого, в (25) [1] присутствует слагаемое $(r-R_{opt/\omega})^2/\sigma_{R_{opt/\omega}}^2$, на котором нужно остановиться подробно. В опубликованном тексте статьи причина появления в (17)–(21) [1] новых параметров $R_{opt/\omega}$ и $\sigma_{R_{opt/\omega}}$ никак не комментируется. Однако после получения выражения (7) можно сделать предположение о назначении $R_{opt/\omega}$ и $\sigma_{R_{opt/\omega}}$, которое укладывается в общую логику статьи.

Фактически в процессе выполнения промежуточных выкладок авторы отказались от совместной обработки массива измерений пеленга с массивом измерений уровней сигнала в частотных диапазонах, зависящих от дальности цели. Вместо этого они выделили обработку измерений уровней в отдельный алгоритм определения дальности цели по уровню сигнала от цели с использованием ММП. Этот алгоритм представлен в виде (17)–(20) [1]. «Новым измерением» дальности цели, получаемым на выходе этого алгоритма, является ММП-оценка $R_{opt/\omega}$. Погрешность «нового измерения» дальности авторы оценивают в виде СКО $\sigma_{R_{opt/\omega}}$, вычисляемого в (21) [1].

Далее совместной ММП-обработке подвергаются массив измерений пеленга $\{\hat{P}_i\}_{i=1}^N$ и «новое измерение» $R_{opt/\omega}$ оцениваемой дальности R_j. По содержанию выкладок можно понять, что измерение $R_{opt/\omega}$ считается нормально распределенным с математическим ожиданием R_j и СКО $\sigma_{R_{opt/\omega}}$. С этой точки зрения интерпретация (22) [1] некорректна: $R_{opt/\omega}$ не является математическим ожиданием этого распределения. По аналогии, например, с (14) [1] эта формула должна быть записана так:

$$g_{R_{opt/\omega}/R_j}(r) = norm\,(r \,\|\, R_j, \sigma_{R_{opt/\omega}})\,.$$

Теперь можно записать аналог формулы (4) для совместной плотности распределения новых измерений. В этой формуле класс цели учитывается в $R_{opt/\omega}$, поэтому не указывается в списке условных параметров:

$$g_{\hat{P}_1,\ldots\hat{P}_N,R_{opt/\omega}/K,V,R_j,P_j}(p_1,\ldots p_N,r) = g_{\hat{P}_1,\ldots\hat{P}_N/K,V,R_j,P_j}(p_1,\ldots p_N) \times norm\,(r \,\|\, R_j, \sigma_{R_{opt/\omega}})\,.$$

Логарифмическая функция правдоподобия, аналог формулы (5):

$$l(k,v,r,p \,|\, \hat{P}_1,\ldots\hat{P}_N, R_{opt/\omega}) = \frac{\left(R_{opt/\omega} - r\right)^2}{\sigma^2_{R_{opt/\omega}}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\hat{P}_i - P(t_i,k,v,r,p)\right)^2}{\sigma^2_{P_i}}\,. \qquad (8)$$

Формула (8) раскрывает истинный смысл выражения (25) [1]: оно описывает блочно-последовательную обработку измерений. Сначала обрабатывается один блок измерений (набор логарифмических уровней сигнала), а затем совместно обрабатывается результат обработки первого блока и следующий блок измерений (оценка дальности обрабатывается совместно с набором измерений пеленга). Такое техническое решение при проектировании алгоритмов обработки траекторных измерений вполне допустимо. Однако современная вычислительная техника позволяет совместно обрабатывать все первичные измерения без разбиения на блоки. Обработка полного набора данных методически более правильна: в ней нет межблочных стыков, на которых теряется драгоценная измерительная информация.

Из полученных выражений (7) и (8) видно, что все они представляют собой целевые функции нелинейного взвешенного МНК. Для нормально распределенных погрешностей эти целевые функции можно записать сразу, не выполняя всех ММП-выкладок.

3. Замечания к опубликованной статье

Замечания приводятся сплошным нумерованным списком так, как это обычно делается при написании рецензии первого этапа. По результатам онлайн-семинара и обсуждения с авторами отдельные замечания были исключены из первоначального списка, содержание оставшихся замечаний отредактировано и появились новые замечания.

1. В статье некорректно применен ММП для совместной обработки измеренных значений величин, функционально связанных с оцениваемыми параметрами, и априорной плотности распределения для одного из оцениваемых параметров. В результате в (23) [1] попала плотность $g_{V/\omega}(x)$ (6) [1], которой там быть не должно.

2. Правая часть (3) [1] на самом деле зависит от 4-х параметров: от трех искомых параметров K, V, R_j и от пеленга цели P_j в момент времени t_j. При записи (1) [1] в опубликованной статье параметр P_j потерялся. Т.е. правильная запись этой формулы должна выглядеть так:

$$\hat{P}_i = P(t_i, K, V, R_j, P_j) + \Delta P_i\,.$$

3. Формула (3) [1] записана для произвольного движения наблюдателя. Это движение задается через координаты наблюдателя $X_н(t)$, $Y_н(t)$ относительно некоторой декартовой системы координат. Эта система координат в статье никак не определена. Далее по тексту эта формула используется совместно с (7) [1], которая записана для равномерного и прямолинейного движения наблюдателя. Из всей логики повествования следует, что неявно предполагается именно такое движение наблюдателя. Поэтому (3) [1] следует переписать в виде, не содержащем декартовых координат и содержащем только те параметры, которые явно используются в статье:

$$P(t_i, K, V, R_j, P_j) = \arctan\frac{R_j \sin P_j + (t_i - t_j)(V\sin K - V_н \sin K_н)}{R_j \cos P_j + (t_i - t_j)(V\cos K - V_н \cos K_н)}\,.$$

4. Начиная с формулы (7) [1], авторы отклонились от алгоритма составления функции правдоподобия, что привело к появлению грубых ошибок, а именно: записав формулу (7) [1], авторы получили угол курса K в виде некоторой вычисляемой детерминированной функции, зависящей от истинной скорости цели и трех углов P_1, P_k, P_N пеленга:

$$K = f(P_1, P_k, P_N, V) = K_\rho + \arcsin\left[\frac{V_н}{v}\sin(K_\rho - K_н)\right].$$

Этим они исключили угол курса из списка оцениваемых параметров в ММП. После формулы (7) [1] правильная совместная плотность вероятности (5) [1] должна была бы выглядеть так:

$$g_{\hat{P}_1,\ldots\hat{P}_N/V,R_j,P_j}(p_1,\ldots p_N) = \prod_{i=1}^{N} g_{\Delta P_i}\left(p_i - P(t_i,\ f(p_1,p_k,p_N,V),\ V,\ R_j,P_j\right).$$

5. Выполнив операцию, отмеченную в замечании 4, авторы столкнулись с очевидным затруднением: надо оценивать курс цели, но из формулы он пропал. Из этого затруднения авторы решили выйти путем искусственного введения новой «случайной» величины – пропавшего угла курса, которой приписали плотность распределения в виде δ-функции и записали формулу (9) [1].

Нужно отметить, что в инженерно-технических статьях δ-функция может появляться в промежуточных выкладках, но перед получением окончательного выражения, используемого для расчетов или моделирования, обязательно должна попадать под знак интеграла. Если δ-функция сохранилась в окончательном выражении, значит, в предшествующих выкладках допущена ошибка.

Записав (9) [1], авторы получили плотность вероятности детерминированной величины (7) [1]:

$$g_{\hat{K}/V}(k)=\delta\big(k-f(P_1,P_k,P_N,V)\big).$$

Далее по тексту в формуле (23) [1] авторы использовали эту формулу для получения совместной плотности вероятности величин $\{\hat{P}_i\}_{i=1}^{N}$ и некоторой ранее не описанной величины $\hat{K}$, условной к набору оцениваемых параметров:

$$g_{\hat{P}_1\ldots\hat{P}_N,\hat{K}/K,V,R_j,P_j}(p_1,\ldots,p_N,k)=$$

$$=\delta\big(k-f(p_1,p_k,p_N,V)\big)\prod_{i=1}^{N}g_{\Delta P_i}\big(p_i-P(t_i,\ k,\ V,\ R_j,P_j\big).$$

В результате в окончательное выражение для совместной плотности вероятности измеренных значений (и в выражение для функции правдоподобия) попала δ-функция, которой там быть не должно.

6. В (23) [1] авторы записали полную функцию правдоподобия для оцениваемых параметров. Естественно, в эту функцию вошла δ-функция, не проинтегрированная ранее. В записанном выражении (23) [1] $g_{\hat{P}_1\ldots\hat{P}_N,K,V,R_J}(p_1\ldots p_M,k,v,r)=\infty$ при всех k и v, при которых

$$k-K_\rho+\arcsin\left[\frac{V_н}{v}\sin(K_\rho-K_н)\right]=0.$$

Тем не менее в (24) [1] от этой функции предлагается вычислять argmax, а в экспериментальной части даже выполняется это вычисление. Правил для сравнения двух действительных, равных ∞, не существует. Поэтому программная реализация формулы (24) [1] в экспериментальной части статьи не соответствует ее математической записи.

7. При выводе формулы (25) [1] утверждается, что все плотности распределения в правой части (24) [1] нормальные. Это ошибочное утверждение, так как очевидно, что величина k имеет плотность распределения в виде δ-функции. Значит, формула (25) [1] неверна. Если формула (24) [1] реализована в экспериментальной части статьи в форме (25) [1], то программная реализация (24) [1] не соответствует ее математической записи.

8. По результатам обсуждения статьи на семинаре авторы исправили вывод функции правдоподобия. Какая целевая функция получилась в результате этого исправления? Как исправление повлияло на результаты моделирования, представленные в опубликованной статье? Нужно ли их обновить в связи с вновь открывшимися обстоятельствами?

9. Формула (21) [1] вызывает очень много вопросов. В этой формуле на стр. 105 впервые появились две необъявленные плотности $g_{P_0}(p)$ и $g_{\Delta K}(\Delta k)$. Объявление этих плотностей находится в разделе 3 на стр. 115. Структура этих плотностей в статье не описана. Такой способ объявления важных плотностей распределения доставляет некоторые неудобства при чтении статьи.

10. В тексте статьи указывается, что для каждого частотного канала измерения логарифмического уровня сигнала вычисляется свой собственный коэффициент передачи $\hat{K}_k$. Но погрешность ΔK вычисления этого коэффициента, заданная плотностью $g_{\Delta K}(\Delta k)$, вводится без подстрочного индекса. В формуле (21) [1] интегрирование по этой погрешности выполняется только один раз, а не столько раз, сколько индикатор I_k отличен от нуля. Эта случайная погрешность одинакова для всех частотных каналов?

11. Значение шумности $P_{0/\omega}$ цели в формулах (20)–(21) [1] зависит только от класса цели, но не зависит от частотного канала k, в котором она прослушивается. Согласно выкладкам статьи, спектральная плотность мощности (СПМ) шума цели равномерна во всем диапазоне рабочих частот приемника, ее уровень изменяется только между классами целей. Плотность вероятности $g_{P_0}(p)$ также не зависит от номера частотного канала приемника, интегрирование по p в (21) [1] делается тоже только один раз. У СПМ цели заданного класса нет никакого специфического частотного окрашивания? Танкер, корвет и подводная лодка имеют одинаково плоские СМП типа «белый шум», которые отличаются только уровнем $P_{0/\omega}$?

12. В тексте статьи этого не написано, но можно предположить, что двукратный интеграл в числителе (21) [1] будет рассчитываться численно для каждого цикла оценки параметров цели. Интеграл записан так, что значение функции $R(p, \Delta k)$ придется рассчитывать в каждом узле двумерной расчетной сетки на области интегрирования $[mP_{0/\omega}-2sP_{0/\omega}, mP_{0/\omega}+2sP_{0/\omega}] \times [-2\sigma_{\Delta K\omega}, 2\sigma_{\Delta K\omega}]$. Т.е. в каждом узле двумерной сетки должна быть решена оптимизационная задача (20) [1]. Нужно включить в статью соображения о мелкости разбиения области интегрирования и о количестве узлов в двумерной сетке численного интегрирования (столько раз будет вызываться функция (20) [1]). Не окажется ли время расчета $\sigma^2_{opt/\omega}$ слишком большим для двумерной сетки с приемлемой мелкостью разбиения?

13. Формула (21) [1] используется для расчета оценки среднеквадратичной погрешности в «новом измерении» $\hat{R}_{opt/\omega}$ дальности цели. Согласно (20) [1], $\hat{R}_{opt/\omega}$ зависит от погрешностей ΔW_k, ΔP_0 и ΔK. Однако в (21) [1] присутствуют только плотности $g_{P_0}(p)$ и $g_{\Delta K}(\Delta k)$, т.е. погрешность ΔW_k при расчете СКО оценки не учитывается. Пусть значения $\hat{P}_{0/\omega}$ и $\hat{K}_{k/\omega}(r)$ известны точно, т.е. $g_{P_0}(p) = \delta(p - \hat{P}_{0/\omega})$ и $g_{\Delta K}(\Delta k) = \delta(\Delta k)$. Т.е. погрешности в $\hat{R}_{opt/\omega}$ возникают только из-за погрешностей ΔW_k. По определению, $R(\hat{P}_{0/\omega}, 0) = R_{opt/\omega}$. Тогда

$$\sigma^2_{opt/\omega} = \int\limits_{mP_{0/\omega}-2sP_{0/\omega}}^{mP_{0/\omega}+2sP_{0/\omega}} \delta(p - \hat{P}_{0/\omega}) \int\limits_{-2\sigma_{\Delta K_\omega}}^{2\sigma_{\Delta K_\omega}} \left[R(p, \Delta k) - R_{opt/\omega}\right]^2 \delta(\Delta k)\, dp\, d\Delta k =$$

$$= \left[R(\hat{P}_{0/\omega}, 0) - R_{opt/\omega}\right]^2 = 0.$$

В формуле (21) [1] нужно учесть ΔW_k и замечания 10 и 11.

14. По результатам дискуссий с авторами и обсуждения статьи на семинаре можно предположить, что (21) [1] используется для инженерного вычисления дисперсии «нового измерения» $\hat{R}_{opt/\omega}$ по исходным данным, доступным для алгоритма, но

нелинейно зависящим от измеряемой дальности. Здесь прослеживается аналогия с понятиями «выборочная дисперсия» и «выборочное среднее» при оценивании значения неизвестной величины по ее измерениям, содержащим аддитивный шум. Если это предположение верно, то нужно описать эту формулу именно в таком ключе, так как опубликованное описание, предшествующее (21) [1], уводит читателя далеко в сторону.

15. В опубликованном описании без ссылки на формулу упоминается функция правдоподобия дальности – вероятно, это (16) [1] в обсуждаемой статье или (3) в настоящем письме. Про эту функцию правдоподобия утверждается со ссылкой на п. 18 списка литературы[1], что после соответствующей нормировки ее можно рассматривать как плотность распределения дальности и с ее помощью рассчитывать апостериорную среднеквадратичную погрешность оценки дальности. При беглом просмотре главы 18 внутри 900-страничной монографии (п.18) этого утверждения найти не удалось. Это очень сильное утверждение, его нужно отредактировать, а лучше совсем от него избавиться.

16. Утверждение нужно редактировать (или убрать) еще и потому, что из него непонятно, в какую плотность распределения дальности превращается функция правдоподобия дальности. Если превращается в априорную, то это неверно: априорная плотность не зависит от принятого измерения. Если превращается в апостериорную, то это тоже неверно: согласно (1), функция правдоподобия дальности превращается в апостериорную плотность при помощи априорной плотности распределения дальности, которая неизвестна. В тексте статьи вводится только априорная плотность $g_{V/\omega}(x)$ (6) [1] распределения скорости.

Заключение

Все проблемы в математическом содержании статьи возникли из-за выбора сложного ММП вместо более простого МНК, дающего тот же самый результат (в данном конкретном случае). Если бы МНК сразу использовался в качестве инструмента оценивания траекторных параметров без отсылок к ММП, в него можно было бы легко включить априорную плотность распределения скорости цели (6) [1]. Для этого при составлении целевой функции МНК достаточно объявить: в целевую функцию из эмпирических соображений вводится регуляризирующее слагаемое, которое будет «подтягивать» апостериорную оценку скорости цели к ее априорному математическому ожиданию. После этого в целевой функции может появиться дополнительное слагаемое вида $(v - m_{V/\omega})^2 / \sigma^2_{V/\omega}$ или другое неотрицательное слагаемое с малым весовым параметром регуляризации. В чистом ММП такие манипуляции недопустимы.

Т.е. в случае выбора МНК без упоминания ММП формулу (25) [1] можно было бы записать сразу после описания модели измерений. Выбор МНК мог бы заметно сократить объем статьи, исключить ошибки в промежуточных выкладках и упростить понимание ее содержания для широкого круга читателей.

В обсуждаемой статье предлагается отдельно обрабатывать набор измерений логарифмического уровня сигнала для получения первоначальной оценки дальности. При этом в статье имеется явная проблема с обоснованием алгоритма вычисления

[1] Кендал М., Стюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973.

дисперсии этой оценки, необходимой для промежуточных вычислений. При совместной обработке всех доступных измерений проблемы с промежуточными вычислениями не возникает, а вычислительные затраты не увеличиваются.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гриненков А.В., Машошин А.И.** Алгоритм определения координат и параметров движения подводного источника шумоизлучения без специального маневрирования наблюдателя // Гироскопия и навигация. 2024. Том 32. №2 (125). С. 98–122. EDN MCTSNV.
2. **Тихонов В.И.** Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
3. **Степанов О.А.** Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. СПб.: ГНЦ РФ – ЦНИИ «Электроприбор», 2003. 370 с.
4. **Василюк Н.Н., Нефедов Г.А., Сидорова Е.А., Шагимуратова Н.О.** Астрономическая калибровка бесплатформенной астроинерциальной навигационной системы. Часть 1: Калибровка относительной ориентации цифровых камер // Гироскопия и навигация. 2024. Том 32. №2 (125). С. 66–84. EDN: IDPTKO.

ОТВЕТ АВТОРОВ

Прежде чем перейти к ответу, авторы статьи хотели бы поблагодарить Николая Николаевича Василюка за проявленный интерес к нашей работе.

Письмо, как оценивает его сам автор, является подробной рецензией на нашу статью. Внимательно изучив ее, с некоторыми из изложенных в ней замечаний мы согласились, с некоторыми – нет. Начнем с последних.

Напомним идею статьи. Одной из обязательно решаемых задач на подводной лодке (ПЛ) является определение координат и параметров движения (курса K, скорости V и дистанции R) (КПД) обнаруженных целей в пассивном режиме работы гидроакустического комплекса (ГАК). Традиционно эта задача решается методом наименьших квадратов либо максимального правдоподобия (см. формулу (6) в письме без второго члена в правой части) на базе модели движения объекта с использованием массива измеренных пеленгов. Но проблема состоит в том, что при равномерном и прямолинейном движении цели и наблюдателя (а именно так в подавляющем большинстве случаев движутся все морские объекты) задача имеет многозначное решение, т.е. фактически не решается.

Авторами статьи предложено выйти из этой ситуации путем привлечения дополнительной информации, в частности класса обнаруженной цели. С учетом класса цели можно определить плотности распределения вероятностей (ПРВ) либо функции правдоподобия (ФП) курса, скорости и дистанции, что позволит сузить область поиска решения при применении традиционного решения по пеленгам. При этом решение будем искать методом максимального правдоподобия с весами, равными значениям ПРВ либо ФП искомых КПД, что позволяет, по выражению автора письма, «подтянуть» оценку параметра к своему наиболее вероятному значению, соответствующему известному классу цели. Моделирование показало, что при таком подходе задача решается с приемлемой точностью.

Автор письма предлагает вернуться к традиционному решению (формула (6)), правда, с добавление второго слагаемого, являющегося максимально правдоподобным решением задачи определения дистанции до цели спектрально-энергетическим методом. Такой подход частично приведет к получению результата, но, учитывая, что точность определения дистанции названным методом невелика, точность определения задачи определения КПД также будет существенно ниже, чем получена в нашей статье. Это можно проверить путем моделирования.

Второе, с чем не согласны авторы статьи, это ряд содержащихся в письме постулируемых правил и запретов при формировании функции правдоподобия, в частности запрет на включение в функцию правдоподобия ПРВ оцениваемого параметра. На наш взгляд, любую корректно сформированную условную ПРВ можно превратить в функцию правдоподобия и использовать ее для поиска максимально правдоподобных оценок условных параметров. Правда, это, как в случае определения КПД по пеленгам, не гарантирует решения задачи. Но это уже другой вопрос.

Имеется также ряд второстепенных моментов, с которыми авторы не согласны. Например, пеленг цели P_j в момент времени t_j, которому соответствует оценка дистанции до цели, не является мешающим оцениваемым параметром, поскольку ввиду высокой точности измерения пеленга он принимается неслучайным (как и остальные пеленги).

Авторы статьи согласны с выявленной автором письма ошибкой в формуле (9), которая затем повторяется в формулах (23)–(25). В этих формулах ПРВ в виде δ-функции

$$\delta\left(k - K_\rho + \arcsin\left[\frac{V_н}{V}\cdot\sin\left(K_\rho - K_н\right)\right]\right)$$

должна быть заменена на условную (в зависимости от скорости цели) ПРВ ошибки определения относительного курса цели

$$g_{\Delta K_\rho/V}\left(k - K_\rho + \arcsin\left[\frac{V_н}{V}\cdot\sin\left(K_\rho - K_н\right)\right]\right).$$

Эту ошибку мы заметили при моделировании, но забыли устранить ее в тексте статьи.

После устранения этой ошибки формулы (9), (23)–(25) примут следующий вид:

$$g_{\hat{K}/V}\left(k\right) = g_{\Delta K_\rho/V}\left(k\right)\left(k - K_\rho + \arcsin\left[\frac{V_н}{V}\cdot\sin\left(K_\rho - K_н\right)\right]\right), \tag{9}$$

где $g_{\Delta K_\rho}$ – ПРВ ошибки определения относительного курса по формуле (8), СКО которой определяется путем моделирования и не превышает 3-5°;

$$\begin{aligned} &g_{\hat{P}_1,\ldots,\hat{P}_N,K,V,R_j}\left(p_1,\ldots,p_N,k,v,r\right) = \\ &= norm\left(r \,\|\, R_{opt/\omega};\sigma_{R_{opt/\omega}}\right)\cdot g_{\Delta K_\rho/V}\left(k - K_\rho + \arcsin\left[\frac{V_н}{v}\cdot\sin\left(K_\rho - K_н\right)\right]\right)\times \\ &\times norm\left(v \,\|\, mV_\omega;sV_\omega\right)\cdot\prod_{i=1}^{N} norm\left(p_i - P\left(t_i,k,v,r_j\right) \,\|\, 0;\sigma_{P_i}\right); \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &\left(\hat{K}_{opt},\hat{V}_{opt},\hat{R}_{opt/j}\right) = \arg\max_{k,v,r} g_{\hat{P}_1,\ldots,\hat{P}_N,K,V,R_j}\left(p_1,\ldots,p_N,k,v,r\right) = \\ &= \arg\max_{v,r}\left\{norm\left(r \,\|\, R_{opt/\omega};\sigma_{R_{opt/\omega}}\right)\cdot g_{\Delta K_\rho/V}\left(k - K_\rho + \arcsin\left[\frac{V_н}{v}\cdot\sin\left(K_\rho - K_н\right)\right]\right)\times\right. \\ &\left.\times norm\left(v \,\|\, mV_\omega;sV_\omega\right)\cdot\prod_{i=1}^{N} norm\left(p_i - P\left(t_i,k,v,r_j\right) \,\|\, 0;\sigma_{P_i}\right)\right\}; \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &\left(\hat{K}_{opt},\hat{V}_{opt},\hat{R}_{opt/j}\right) = \\ &= \arg\min_{v,r}\left\{\frac{\left(r - R_{opt/\omega}\right)^2}{\sigma^2_{R_{opt/\omega}}} + \frac{\left(v - mV_\omega\right)^2}{sV^2_\omega} + \frac{\left(k - mK\right)^2}{sK^2_\rho} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\left(p_i - P\left(t_i,k,v,r_j\right)\right)^2}{\sigma^2_{P_i}}\right\}. \end{aligned} \tag{25}$$

В заключение хочется еще раз поблагодарить автора письма за проявленный интерес к нашей статье и подробное изложение своей позиции. Надеемся, что все возникшие в ходе дискуссии вопросы нашли ответы.

А.И. Машошин,
А.В. Гриненков