

Н. Н. ВАСИЛЮК

МОДЕЛЬ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЗВЕЗДНОГО ДАТЧИКА ОРИЕНТАЦИИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ПОГРЕШНОСТИ КАЛИБРОВКИ ЭЛЕМЕНТОВ ВНУТРЕННЕГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ ЦИФРОВОЙ КАМЕРЫ

Модель погрешностей звездного датчика ориентации представлена в виде разложения на флуктуационную и систематическую составляющие. Флуктуационная погрешность возникает при вычислении координат яркостного центра цифрового изображения звезды и обусловлена дискретной структурой сигнала в матричном фотоприемнике. Если наблюдение звезд выполняется через атмосферу, у флуктуационной погрешности появляется дополнительная внешняя компонента, связанная с «дрожанием» изображений звезд из-за атмосферной турбулентности. Систематическая погрешность возникает из-за погрешностей калибровки элементов внутреннего ориентирования цифровой камеры. Для всех составляющих погрешности ориентации получены линеаризованные аналитические выражения и ковариационные матрицы, зависящие от конфигурации наблюдаемого созвездия. Модель погрешностей легко переписывается в форме уравнения наблюдения за погрешностями оценки элементов внутреннего ориентирования камеры в сильносвязанной комплексированной астронавигационной системе. Приведены результаты экспериментальной проверки разработанной модели погрешностей. Численные значения погрешностей, полученные в эксперименте, наглядно показывают, что элементы внутреннего ориентирования цифровой камеры звездного датчика необходимо регулярно калибровать в процессе эксплуатации.

Ключевые слова: астродатчик, модель погрешностей, центроид, дрожание изображений, калибровка дисторсии, уравнение наблюдения.

Введение

Измерения ориентации при помощи звездного датчика (астродатчика) выполняются путем сравнения измеренных и каталожных декартовых координат единичных векторов, задающих направления на одни и те же звезды (далее – направляющих векторов звезд). Измеренные координаты направляющих векторов звезд вычисляются из изображения звездного поля, полученного цифровой камерой. Каталожные координаты направляющих векторов вычисляются из данных звездного каталога. В результате сравнения определяется ориентация правой ортогональной системы координат, связанной с конструкцией камеры, относительно правой ортогональной инерциальной системы координат звездного каталога. Измерения астродатчика могут быть привязаны к поверхности Земли только при помощи дополнитель-

Василюк Николай Николаевич. Кандидат физико-математических наук, заместитель главного конструктора, ООО «НПК Электрооптика». ORCID 0000-0003-2317-8066.

ной информации. Так, если известно направление вертикали в точке наблюдения, то из измерений астродатчика можно рассчитать долготу и широту наблюдателя и азимут оптической оси камеры. Если известны географические координаты точки наблюдения, из измеренной ориентации астродатчика (относительно звезд) можно рассчитать его ориентацию относительно земной топоцентрической системы координат (углы курса, крена и тангажа). Высота над поверхностью Земли из измерений астродатчика не вычисляется [1].

Задача определения наилучших (в смысле квадратичной целевой функции) параметров ориентации по зашумленным значениям координат единичных векторов называется задачей Вахбы [2]. Широко известен алгоритм QUEST, позволяющий решить задачу Вахбы в форме кватерниона ориентации [3]. Этот алгоритм не требует значительных вычислительных ресурсов и годится для применения в реальном времени. Наилучшей численной устойчивостью обладает алгоритм решения задачи Вахбы на основе сингулярного разложения [4]. Структура этого алгоритма позволяет вывести некоторые общие аналитические соотношения, касающиеся задачи Вахбы. На базе этих двух подходов к настоящему времени разработано несколько алгоритмов решения задачи Вахбы в реальном времени, адаптированных как для отдельно используемых астродатчиков, так и для астродатчиков в составе комплексированных астронавигационных систем [5].

Погрешность измерения ориентации астродатчиком (погрешность астродатчика) зависит от погрешностей измерения координат отдельных направляющих векторов звезд и от пространственной структуры векторного пучка. В [3] приведена простая формула для вычисления ковариационной матрицы вектора малого поворота, описывающего погрешность астродатчика. Эта формула получена в предположении, что истинные значения измеренных и каталожных координат направляющих векторов совпадают (т.е. для нулевого поворота). В настоящей статье будет использоваться формула для ковариационной матрицы погрешностей астродатчика, полученная в [4] для произвольного поворота. В некоторых работах ковариационная матрица погрешности астродатчика считается диагональной [6, 7], хотя это заведомо не так [8].

Если скорректировать влияние внешних эффектов, систематически искажающих видимые направления на звезды [9, 10], то погрешности измерения направляющих векторов звезд внутри астродатчика разделяются на флуктуационные и систематические [11, 12]. Флуктуационные погрешности обусловлены дискретным (квантовым) шумом в оптическом сигнале, приходящем от звезды, и электронным шумом в тракте преобразования оптического сигнала в цифровой код. Показано [5], что центрированные флуктуационные погрешности в измеряемых векторах не приводят к смещению в измерениях ориентации астродатчика в первом порядке малости. Смещение проявляется только во втором и в высших порядках малости.

Если астродатчик расположен внутри земной атмосферы, у флуктуационной погрешности измерения направляющих векторов появляется дополнительная составляющая, связанная со случайными изменениями видимого направления на звезду. Изменения вызываются атмосферной турбулентностью, которая приводит к локальным флуктуациям коэффициента преломления воздуха вдоль трассы распространения звездного света. В цифровом изображении эти изменения проявляются как случайные блуждания («дрожания») изображения звезды вокруг некоторого среднего положения. Среднеквадратичное отклонение (СКО) дрожания направляющего

вектора звезды, оцененное по дрожанию края солнечного диска и по результатам наблюдения звезды в утренней атмосфере [13, 14], составляет 1-3".

Основная часть систематических погрешностей измерения направляющих векторов звезд имеет геометрическую природу и связана с отклонением фактических значений элементов внутреннего ориентирования камеры (фокусное расстояние, координаты главной точки изображения, коэффициенты геометрической дисторсии) от номинальных. Эти отклонения калибруются как при производстве астродатчиков [15, 16], так и при их эксплуатации [17–19]. Определенный вклад в систематическую погрешность вносит энергетическая дисторсия [20] (называемая также микродисторсией [21]), связанная с погрешностями пространственной дискретизации оптического изображения звезды в цифровой камере. В [12] исследуется влияние неравномерности «темнового» сигнала в отдельных фотоприемных ячейках на систематическую погрешность определения направления на звезду. Влияние погрешностей калибровки элементов внутреннего ориентирования на погрешность астродатчика в доступной литературе не изучается.

В настоящей работе построена линеаризованная модель погрешностей астродатчика, включающая в себя флуктуационную компоненту в определении координат изображений отдельных звезд и учитывающая погрешности калибровки элементов внутреннего ориентирования камеры. Во флуктуационной компоненте объединены дискретный шум сигнала в отдельных пикселях цифрового изображения звезды и дрожание этого изображения на атмосферной турбулентности. Погрешности калибровки приводят к смещению в измерениях ориентации астродатчика уже в первом порядке малости, причем смещение зависит от формы и угловых размеров наблюдаемого созвездия. Предложенная модель погрешностей астродатчика не учитывает погрешности моделей атмосферной рефракции и скоростной аберрации света, используемых для вычислительной коррекции этих эффектов. Модель проверена на экспериментальных данных, полученных при наземной калибровке элементов внутреннего ориентирования реальной цифровой камеры.

1. Модель первичных измерений астродатчика

1.1. Геометрическая модель цифровой камеры

Объектив цифровой камеры астродатчика строит оптическое изображение наблюдаемого созвездия на поверхности полупроводникового матричного фотоприемника (МФП). Поверхность МФП представляет собой плоскую прямоугольную матрицу размером $H \times W$, где H , W – ее высота и ширина, составленную из однотипных фоточувствительных ячеек квадратной формы с длиной стороны a (рис. 1).

Положение отдельной фотоприемной ячейки в плоскости МФП задается парой целочисленных растровых индексов $(\hat{h}, \hat{w}) \in \mathbb{Z}^2$, где $\hat{h} = 0 \dots H - 1$, $\hat{w} = 0 \dots W - 1$. Значения индексов $(0, 0)$ соответствуют ячейке, расположенной в левом верхнем углу МФП. Индексы \hat{h} , \hat{w} увеличиваются в направлениях сверху вниз и слева направо вдоль вертикальной и горизонтальной сторон МФП. Непрерывное оптическое изображение, построенное объективом на плоскости МФП, подвергается пространственной дискретизации на границах отдельных ячеек. Сигналы, полученные отдельными ячейками, преобразуются в цифровые коды, считываются из МФП и выстраиваются

в виде числовой матрицы размером $H \times W$, называемой цифровым изображением. Пиксель с индексами (\hat{h}, \hat{w}) внутри цифрового изображения получает свое значение из фотоприемной ячейки с индексами (\hat{h}, \hat{w}) внутри матрицы МФП.

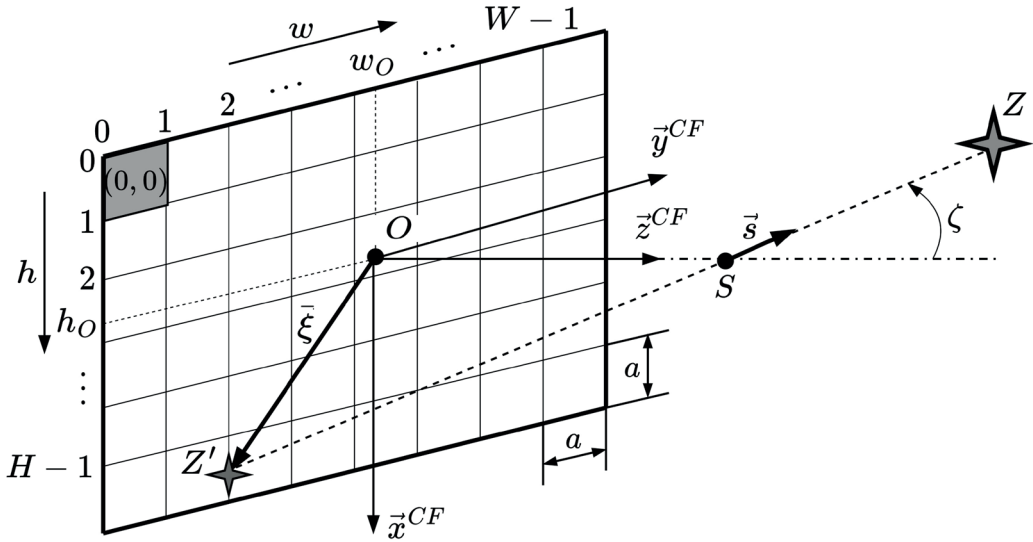


Рис. 1. Геометрическая модель цифровой камеры и системы координат. Штрих-пунктирной линией обозначена оптическая ось камеры. Обозначения на рисунке расшифрованы далее по тексту

Для описания процесса пространственной дискретизации изображения в плоскости МФП вводятся действительные растровые координаты $[h \ w]^T \in \mathbb{R}^2$, $0 \leq h < H$, $0 \leq w < W$ с началом в левом верхнем углу левой верхней ячейки МФП (ячейки с растровыми индексами $(\hat{h}, \hat{w}) = (0, 0)$). Значения координат h, w увеличиваются в направлениях роста одноименных индексов \hat{h}, \hat{w} . Масштаб растровых координат выбран так, чтобы точка на поверхности МФП с целочисленными значениями растровых координат $[\hat{h} \ \hat{w}]^T$ попадала в левый верхний угол ячейки МФП с растровыми индексами (\hat{h}, \hat{w}) . Таким образом, в формировании значения в пикселе (\hat{h}, \hat{w}) участвуют точки непрерывного оптического изображения с растровыми координатами $[h \ w]^T$ из двумерного множества, определяемого как декартово произведение полуинтервалов $[\hat{h}, \hat{h} + 1) \times [\hat{w}, \hat{w} + 1)$.

Поверхность МФП размещается в фокальной плоскости объектива. Оптическая ось объектива перпендикулярна поверхности МФП и пересекает ее в точке O с растровыми координатами $[h_o \ w_o]^T$. Точка O расположена вблизи геометрического центра МФП и называется главной точкой изображения (не путать с главной точкой объектива). С цифровой камерой связана правая ортонормированная система координат CF (Camera Frame), начало которой размещается в точке O , ось \vec{z}^{CF} лежит на оптической оси объектива и направлена в пространство предметов; оси \vec{x}^{CF} , \vec{y}^{CF} параллельны вертикальной и горизонтальной сторонам МФП и направлены в стороны увеличения растровых координат h и w соответственно (рис. 1).

Идеальный объектив строит геометрическое изображение звезды Z в виде ее центральной проекции Z' на фокальную плоскость. Центр проецирования S расположен на оптической оси объектива и удален от фокальной плоскости на фокусное расстояние $F = OS$. Направление на звезду Z в пространстве предметов описывается единичным направляющим вектором \vec{s} со столбцом координат в CF $\mathbf{s}_{CF} = [s_{x_{CF}} \ s_{y_{CF}} \ s_{z_{CF}}]^T$.

Положение точки Z' в плоскости МФП задается вектором $\bar{\xi}$ с координатами $\xi = [x \ y]^T$ относительно осей \bar{x}^{CF} и \bar{y}^{CF} . Координаты ξ , называемые векторными координатами изображения Z' , связаны с координатами \mathbf{s} направляющего вектора звезды Z следующими соотношениями:

$$\xi = -\frac{F}{s_{zCF}} \begin{bmatrix} s_{xCF} \\ s_{yCF} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \frac{[-x \ -y \ F]^T}{(x^2 + y^2 + F^2)^{1/2}}. \quad (1)$$

Векторные ξ и растровые $[h \ w]^T$ координаты изображающей точки Z' связаны соотношениями

$$\xi = a \begin{bmatrix} h - h_o \\ w - w_o \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} h \\ w \end{bmatrix} = \frac{\xi}{a} + \begin{bmatrix} h_o \\ w_o \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Геометрическое изображение, построенное реальным объективом, отклоняется от центральной проекции. Это отклонение называется геометрической дисторсией и описывается хорошо известной в фотограмметрической литературе моделью Брауна–Конради [22, 23]. В рамках данной модели дисторсия разделяется на радиальную и тангенциальную. Радиальная дисторсия возникает на сферических поверхностях последовательных линз с совпадающими осями симметрии. Тангенциальная дисторсия обусловлена погрешностями размещения отдельных линз вдоль общей оси симметрии. Цифровая камера астродатчика – это измерительное устройство, для которого преимущественной является радиальная дисторсия, обусловленная сферичностью поверхностей линз, а не погрешностями сборки объектива. Пусть $\eta = [\tilde{x} \ \tilde{y}]^T$ – векторные координаты геометрического изображения звезды, построенного объективом с дисторсией. Радиальная дисторсия в этих координатах исправляется следующим образом:

$$\xi = (1 + k_1 \tilde{r}^2 + k_2 \tilde{r}^4 + \dots)\eta, \quad (3)$$

где $\tilde{r}^2 = \eta^T \eta$; k_1, k_2, \dots – коэффициенты радиальной дисторсии. В главной точке изображения $x = \tilde{x} = y = \tilde{y} = 0$, поэтому $\xi = \eta$. Т.е. в этой точке радиальная дисторсия отсутствует.

Для дисторсии второго порядка преобразование плоских координат изображения звезды в пространственные координаты ее направляющего вектора описывается вектором $\mathbf{p} = [F \ h_o \ w_o \ k_1 \ k_2]^T$, состоящим из пяти параметров, называемых элементами внутреннего ориентирования камеры. Их истинные значения определяются в результате производственной калибровки, а затем уточняются в процессе эксплуатации астродатчика.

1.2. Измерение координат изображения звезды

Объектив неподвижного астродатчика строит изображение звезды в виде рассеянного пятна, распределение освещенности в котором описывается функцией рассеяния точки (ФРТ). Для измерения координат центра цифрового изображения пятна на него накладывається квадратное окно усреднения размером $2N_w + 1 \times 2N_w + 1$ пикселей, где $N_w \in \mathbb{N}$ – полуширина окна. Измеренными координатами изображения звезды считаются растровые координаты центра масс (называемого также яркостным центром, или фотоцентром, пятна) всех пикселей внутри окна усреднения [12, 24]:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_S &= \frac{1}{I_\Sigma} \sum_{\hat{h}=\hat{h}_C-N_W}^{\hat{h}_C+N_W} \hat{h} \sum_{\hat{w}=\hat{w}_C-N_W}^{\hat{w}_C+N_W} I(\hat{h}, \hat{w}), \quad \tilde{w}_S = \frac{1}{I_\Sigma} \sum_{\hat{w}=\hat{w}_C-N_W}^{\hat{w}_C+N_W} \hat{w} \sum_{\hat{h}=\hat{h}_C-N_W}^{\hat{h}_C+N_W} I(\hat{h}, \hat{w}), \\ I_\Sigma &= \sum_{\hat{w}=\hat{w}_C-N_W}^{\hat{w}_C+N_W} \sum_{\hat{h}=\hat{h}_C-N_W}^{\hat{h}_C+N_W} I(\hat{h}, \hat{w}), \end{aligned} \quad (4)$$

где (\hat{h}_C, \hat{w}_C) – растровые индексы пикселя, в котором расположен центр окна; $I(\hat{h}, \hat{w}) = I_{raw}(\hat{h}, \hat{w}) - \langle I_{bg}(\hat{h}, \hat{w}) \rangle$ – яркость пикселя (\hat{h}, \hat{w}) с математическим ожиданием $\langle I(\hat{h}, \hat{w}) \rangle$ после вычитания фона; $I_{raw}(\hat{h}, \hat{w})$ – первичная яркость пикселя (\hat{h}, \hat{w}) , полученная из МФП; $\langle I_{bg}(\hat{h}, \hat{w}) \rangle$ – математическое ожидание «фоновой подставки». Координаты $[\tilde{h}_S \quad \tilde{w}_S]^T$ искажены дисторсией.

Фоновая подставка $I_{bg}(\hat{h}, \hat{w})$ представляет собой аддитивный сигнал, порождаемый излучением фона, на котором наблюдается звезда, и всевозможными внутренними токами МФП. Значения $\langle I_{bg}(\hat{h}, \hat{w}) \rangle$ рассчитываются непосредственно по обрабатываемому кадру. Далее методические погрешности расчета $\langle I_{bg}(\hat{h}, \hat{w}) \rangle$ учитываться не будут. Т.е. после вычитания $\langle I_{bg}(\hat{h}, \hat{w}) \rangle$ в яркости $I(\hat{h}, \hat{w})$ остается только флуктуационная составляющая фона, а $\langle I(\hat{h}, \hat{w}) \rangle$ содержит лишь математическое ожидание полезного сигнала.

Флуктуации $\delta I(\hat{h}, \hat{w}) = I(\hat{h}, \hat{w}) - \langle I(\hat{h}, \hat{w}) \rangle$ в отдельных пикселях считаются независимыми, и математические ожидания измеренных растровых координат звезды следующие:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{h}_S \rangle &\approx \frac{1}{\langle I_\Sigma \rangle} \sum_{\hat{h}=\hat{h}_C-N_W}^{\hat{h}_C+N_W} \hat{h} \sum_{\hat{w}=\hat{w}_C-N_W}^{\hat{w}_C+N_W} \langle I(\hat{h}, \hat{w}) \rangle, \quad \langle \tilde{w}_S \rangle \approx \frac{1}{\langle I_\Sigma \rangle} \sum_{\hat{w}=\hat{w}_C-N_W}^{\hat{w}_C+N_W} \hat{w} \sum_{\hat{h}=\hat{h}_C-N_W}^{\hat{h}_C+N_W} \langle I(\hat{h}, \hat{w}) \rangle, \\ \langle I_\Sigma \rangle &= \sum_{\hat{w}=\hat{w}_C-N_W}^{\hat{w}_C+N_W} \sum_{\hat{h}=\hat{h}_C-N_W}^{\hat{h}_C+N_W} \langle I(\hat{h}, \hat{w}) \rangle. \end{aligned}$$

Знак \approx в этих выражениях указывает на то, что они справедливы только для первого порядка $\delta I(\hat{h}, \hat{w})$. При учете высших порядков вариации в этих оценках математического ожидания появляются смещения [25]. Из-за флуктуаций яркости возникают погрешности расчета координат яркостного центра:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{h}_S &= \tilde{h}_S - \langle \tilde{h}_S \rangle = \frac{1}{\langle I_\Sigma \rangle} \sum_{\hat{h}=\hat{h}_C-N_W}^{\hat{h}_C+N_W} \Delta \tilde{h}_S \sum_{\hat{w}=\hat{w}_C-N_W}^{\hat{w}_C+N_W} \delta I(\hat{h}, \hat{w}), \\ \delta \tilde{w}_S &= \tilde{w}_S - \langle \tilde{w}_S \rangle = \frac{1}{\langle I_\Sigma \rangle} \sum_{\hat{w}=\hat{w}_C-N_W}^{\hat{w}_C+N_W} \Delta \tilde{w}_S \sum_{\hat{h}=\hat{h}_C-N_W}^{\hat{h}_C+N_W} \delta I(\hat{h}, \hat{w}), \end{aligned}$$

где $\Delta \tilde{h}_S = \hat{h} - \langle \tilde{h}_S \rangle$, $\Delta \tilde{w}_S = \hat{w} - \langle \tilde{w}_S \rangle$. Ковариационную матрицу этих погрешностей запишем как

$$\text{cov}\{[\delta \tilde{h}_S \quad \delta \tilde{w}_S]^T\} = \begin{bmatrix} \sigma_{hh}^2 & \sigma_{hw}^2 \\ \sigma_{hw}^2 & \sigma_{ww}^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $\sigma_{hh}^2 = \frac{1}{\langle I_\Sigma \rangle^2} \sum_{\hat{h}=\hat{h}_C-N_W}^{\hat{h}_C+N_W} \Delta \tilde{h}_S^2 \sum_{\hat{w}=\hat{w}_C-N_W}^{\hat{w}_C+N_W} \sigma_I^2(\hat{h}, \hat{w})$, $\sigma_{ww}^2 = \frac{1}{\langle I_\Sigma \rangle} \sum_{\hat{w}=\hat{w}_C-N_W}^{\hat{w}_C+N_W} \Delta \tilde{w}_S^2 \sum_{\hat{h}=\hat{h}_C-N_W}^{\hat{h}_C+N_W} \sigma_I^2(\hat{h}, \hat{w})$,

$$\sigma_{hw}^2 = \frac{1}{\langle I_\Sigma \rangle} \sum_{\hat{w}=\hat{w}_C-N_W}^{\hat{w}_C+N_W} \sum_{\hat{h}=\hat{h}_C-N_W}^{\hat{h}_C+N_W} \Delta \tilde{w}_S \Delta \tilde{h}_S \sigma_I^2(\hat{h}, \hat{w}), \quad \sigma_I^2(\hat{h}, \hat{w}) = \langle \delta I(\hat{h}, \hat{w})^2 \rangle.$$

Простейшим вариантом аппроксимации ФРТ является осесимметричная функция Гаусса от векторных координат с максимумом в точке Z' [26]:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_A^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_A^2}\right),$$

где $\sigma_A = r_A / \sqrt{-2 \ln(1-A)}$ – параметр кружка рассеяния; r_A – радиус кружка рассеяния, в который попадает доля $A \in (0, 1)$ потока излучения от звезды [27]. Далее будет рассматриваться кружок, вписанный в кластер 2×2 смежных фотоприемных ячеек, т.е. $r_A = a$, на границе которого (на окружности $x^2 + y^2 = r_A^2$) значение ФРТ уменьшается в e^2 раз относительно своего максимума. Для этого кружка с параметрами $r_A = a = 2\sigma_A$, $\sigma_A = 0,5a$, $A \approx 0,865$ в [21, 24] с помощью моделирования показано, что максимальная методическая погрешность определения растровых координат геометрического изображения звезды (точка Z' на рис. 1) по формулам (4) не превышает $0,05a$. Для дальнейших расчетов этой погрешностью будем пренебрегать и считать, что Z' расположена точно в центре ячейки (\hat{h}_c, \hat{w}_c) , а ее растровые координаты $[\hat{h}_c + \delta h \ \hat{w}_c + \delta w]^T$, $\delta h = \delta w = 0,5$. В этом случае методическая погрешность (4) равна нулю.

Математическое ожидание сигнала $\langle I(\hat{h}, \hat{w}) \rangle$ в ячейке $(\hat{h}, \hat{w}) = (\hat{h}_c + \hat{p}, \hat{w}_c + \hat{q})$, $\hat{p}, \hat{q} = -N_w \dots N_w$ внутри окна пропорционально числу электронов, накопленных в зарядовой емкости ячейки:

$$\langle I(\hat{h}_c + \hat{p}, \hat{w}_c + \hat{q}) \rangle = kN_e \hat{\Phi}(\hat{p}, \hat{q}), \quad \hat{\Phi}(\hat{p}, \hat{q}) = \int_{a(\hat{p}-\delta h)}^{a(\hat{p}+1-\delta h)} dx \int_{a(\hat{q}-\delta w)}^{a(\hat{q}+1-\delta w)} dy \Phi(x, y), \quad (6)$$

где $N_e = P_e T_E$ – математическое ожидание общего числа электронов, накопленных во всех ячейках МФП, освещенных звездным светом, за время экспозиции T_E ; P_e – мощность попавшего на поверхность МФП излучения звезды, выраженная через скорость рождения фотоэлектронов в полупроводниковой структуре МФП; k – коэффициент пропорциональности, преобразующий число электронов в единицы младшего разряда АЦП [28]. Значение P_e рассчитывается для каждой звезды при подготовке встроенного звездного каталога астродатчика на основании спектра излучения этой звезды, энергетических характеристик объектива цифровой камеры и спектрального распределения квантовой эффективности МФП [29, 30]. При записи (6) был опущен множитель $\cos \zeta$, где ζ – угол между направлением на звезду и оптической осью камеры (рис. 1). Поле зрения навигационных астродатчиков не превосходит 30° , т.е. $\cos \zeta \geq \cos 15^\circ \approx 0,966$. Без ущерба для точности рассматриваемой модели этот множитель можно положить равным 1. Выражение для коэффициентов $\hat{\Phi}(\hat{p}, \hat{q})$ пространственно-дискретизированной ФРТ записывается через стандартную функцию $\text{erf}(x)$ ошибок Гаусса [24]:

$$\hat{\Phi}(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{1}{4} \left[\text{erf}\left(\frac{a(\hat{p}+1-\delta h)}{\sqrt{\alpha}}\right) - \text{erf}\left(\frac{a(\hat{p}-\delta h)}{\sqrt{\alpha}}\right) \right] \times \left[\text{erf}\left(\frac{a(\hat{q}+1-\delta w)}{\sqrt{\alpha}}\right) - \text{erf}\left(\frac{a(\hat{q}-\delta w)}{\sqrt{\alpha}}\right) \right],$$

где $\alpha = 2\sigma_A^2 \approx 0,5a^2$, $\delta h = \delta w = 0,5$; $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Вывод этого выражения приведен в приложении.

Дисперсия яркости $\sigma_I^2(\hat{h}_c + \hat{p}, \hat{w}_c + \hat{q}) \equiv \sigma_I^2(\hat{p}, \hat{q}) = \sigma_Q^2(\hat{p}, \hat{q}) + k^2 \sigma_{bg}^2$ складывается из дисперсии $\sigma_Q^2(\hat{p}, \hat{q})$ квантового шума сигнала звезды и дисперсии σ_{bg}^2 флукуационной составляющей фона. Квантовый шум имеет пуассоновское распределение, и его дисперсия $\sigma_Q^2(\hat{p}, \hat{q}) = k^2 N_e \hat{\Phi}(\hat{p}, \hat{q}) = k \langle I(\hat{h}_c + \hat{p}, \hat{w}_c + \hat{q}) \rangle$.

Дисперсия $\sigma_{bg}^2 = \sigma_{rd}^2 + \sigma_{dc}^2 + \sigma_{ob}^2 + \sigma_{ADC}^2$, где σ_{rd}^2 – дисперсия шума считывания; $\sigma_{dc}^2 = i_{dc} T_E$ – дисперсия темнового заряда, i_{dc} – темновой ток МФП; σ_{ob}^2 – пуассоновская дисперсия излучения оптического фона; $\sigma_{ADC}^2 = QS^2 / 12$ – дисперсия шума квантования, QS – шаг квантования. Значения σ_{rd} , i_{dc} и QS указываются в спецификации МФП, а σ_{ob} рассчитывается исходя из условий наблюдения. Пример такого расчета приведен далее.

Теперь можно переписать коэффициенты ковариационной матрицы (5):

$$\begin{aligned} \sigma_{hh}^2 &= \frac{1}{N_e} \sum_{\hat{p}=-N_w}^{N_w} \sum_{\hat{q}=-N_w}^{N_w} \frac{(\hat{p}-\delta h)^2 \hat{\Phi}(\hat{p}, \hat{q})}{\hat{\Phi}_\Sigma^2} + \frac{\sigma_{bg}^2}{N_e^2} \sum_{\hat{q}=-N_w}^{N_w} \sum_{\hat{p}=-N_w}^{N_w} \frac{(\hat{p}-\delta h)^2}{\hat{\Phi}_\Sigma^2}, \\ \sigma_{ww}^2 &= \frac{1}{N_e} \sum_{\hat{q}=-N_w}^{N_w} \sum_{\hat{p}=-N_w}^{N_w} \frac{(\hat{q}-\delta w)^2 \hat{\Phi}(\hat{p}, \hat{q})}{\hat{\Phi}_\Sigma^2} + \frac{\sigma_{bg}^2}{N_e^2} \sum_{\hat{p}=-N_w}^{N_w} \sum_{\hat{q}=-N_w}^{N_w} \frac{(\hat{q}-\delta w)^2}{\hat{\Phi}_\Sigma^2}, \\ \sigma_{hw}^2 &= \frac{1}{N_e} \sum_{\hat{q}=-N_w}^{N_w} \sum_{\hat{p}=-N_w}^{N_w} \frac{(\hat{q}-\delta w)(\hat{p}-\delta h) \hat{\Phi}(\hat{p}, \hat{q})}{\hat{\Phi}_\Sigma^2} + \frac{\sigma_{bg}^2}{N_e^2} \sum_{\hat{q}=-N_w}^{N_w} \sum_{\hat{p}=-N_w}^{N_w} \frac{(\hat{q}-\delta w)(\hat{p}-\delta h)}{\hat{\Phi}_\Sigma^2}, \\ \hat{\Phi}_\Sigma &= \sum_{\hat{q}=-N_w}^{N_w} \sum_{\hat{p}=-N_w}^{N_w} \hat{\Phi}(\hat{p}, \hat{q}). \end{aligned}$$

Типовой размер окна для кружка рассеяния $r_A = a$ пикселя составляет 3×3 пикселя, т.е. $N_w = 1$ [12]. Для этого случая ковариационная матрица случайной погрешности определения растровых координат яркостного центра принимает вид:

$$\text{cov}\{[\delta \tilde{h}_s \quad \delta \tilde{w}_s]^T\} = \frac{1}{P_e T_E} \begin{bmatrix} 0,5682 & 0,2513 \\ 0,2513 & 0,5682 \end{bmatrix} + \frac{\sigma_{bg}^2}{(P_e T_E)^2} \begin{bmatrix} 8,3391 & 2,2743 \\ 2,2743 & 8,3391 \end{bmatrix}.$$

Формулу (3) коррекции дисторсии перепишем, обозначив $\mathbf{H} = \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T$:

$$\boldsymbol{\xi} = (1 + k_1 \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + k_2 (\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta})^2) \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{I}_2 + k_1 \mathbf{H} + k_2 \mathbf{H}^2) \boldsymbol{\eta},$$

где $\boldsymbol{\eta} = a[\tilde{h}_s - h_o \quad \tilde{w}_s - w_o]^T$ – векторные координаты яркостного центра изображения звезды до коррекции дисторсии, рассчитанные согласно (2). Вариация этого выражения дает погрешность в векторных координатах яркостного центра после коррекции дисторсии:

$$\delta \boldsymbol{\xi}_{dst} = (\delta k_1 \mathbf{H} + \delta k_2 \mathbf{H}^2) \boldsymbol{\eta} + (k_1 \delta \mathbf{H} + k_2 [\delta \mathbf{H} \mathbf{H} + \mathbf{H} \delta \mathbf{H}]) \boldsymbol{\eta} + (\mathbf{I}_2 + k_1 \mathbf{H} + k_2 \mathbf{H}^2) \delta \boldsymbol{\eta},$$

где $\delta \boldsymbol{\eta} = \delta \boldsymbol{\eta}_{ns} - a[\delta \tilde{h}_s \quad \delta \tilde{w}_s]^T$ – погрешность расчета векторных координат $\boldsymbol{\eta}$, которая содержит флукуационную $\delta \boldsymbol{\eta}_{ns} = a[\delta \tilde{h}_s \quad \delta \tilde{w}_s]^T$ и систематическую $a[\delta h_o \quad \delta w_o]^T$ составляющую, возникающую из-за погрешностей калибровки элементов внутреннего ориентирования. После перегруппировки вариаций получается новое выражение для $\delta \boldsymbol{\xi}_{dst}$:

$$\delta \boldsymbol{\xi}_{dst} = (\mathbf{I}_2 + \mathbf{C}_1) \delta \boldsymbol{\eta}_{ns} - a(\mathbf{I}_2 + \mathbf{C}_1) \begin{bmatrix} \delta h_o \\ \delta w_o \end{bmatrix} + \mathbf{C}_2 \begin{bmatrix} \delta k_1 \\ \delta k_2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $\mathbf{C}_1 = k_1(\mathbf{H} + \mathbf{M}) + k_2(\mathbf{H}^2 + \mathbf{M}^2)$, $\mathbf{M} = \tilde{r}^2 \mathbf{I}_2 + \mathbf{H}$, $\mathbf{C}_2 = \boldsymbol{\eta}[\tilde{r}^2 \ \tilde{r}^4]$. Ковариационную матрицу флуктуационной составляющей погрешности $\delta \tilde{\xi}_{dsi}$ выразим как

$$\mathbf{P}_{ns} = a^2 (\mathbf{I}_2 + \mathbf{C}_1) \text{cov}\{[\delta \tilde{h}_s \ \delta \tilde{w}_s]^T\} (\mathbf{I}_2 + \mathbf{C}_1)^T.$$

1.3. Измерение координат направляющего вектора

Истинные направления на звезды, наблюдаемые астродатчиком, сконцентрированы вокруг оптической оси цифровой камеры, вдоль которой направлена ось \bar{z}^{CF} . В связи с этим способ определения угловых координат направления на звезду в CF нужно выбирать так, чтобы в последовательности из двух поворотов, переводящих \bar{z}^{CF} в направление на звезду, отсутствовал поворот вокруг самой оси \bar{z}^{CF} . Такой выбор последовательности поворотов гарантирует отсутствие сингулярности в угловых координатах наблюдаемой звезды. Далее используется следующая система из двух поворотов. Первый выполняется вокруг оси \bar{y}^{CF} на угол φ_y до совмещения оси \bar{z}^{CF} с проекцией направляющего вектора звезды на плоскость $\bar{x}^{CF} O \bar{z}^{CF}$. Вторым поворотом выполняется на угол φ_x вокруг оси \bar{x}' , в которую перешла ось \bar{x}^{CF} после первого поворота, до совмещения оси \bar{z}' (в нее перешла ось \bar{z}^{CF}) с направляющим вектором звезды. Координаты направляющего вектора \mathbf{s}_{CF} звезды в такой последовательности поворотов следующие:

$$\mathbf{s}_{CF} = [s_{xCF} \ s_{yCF} \ s_{zCF}]^T = [s_{\varphi_y} c_{\varphi_x} \ -s_{\varphi_x} c_{\varphi_y} c_{\varphi_x}]^T,$$

где $c_{\varphi} \equiv \cos\varphi$, $s_{\varphi} = \sin\varphi$.

Флуктуации $\delta\boldsymbol{\varphi} = [\delta\varphi_y \ \delta\varphi_x]^T$ угловых координат направляющего вектора смещают его конец вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений, лежащих в плоскости, перпендикулярной истинному направлению на звезду. Далее считается, что эти флуктуации независимы, имеют одинаковые нормальные распределения с нулевым средним. Численные значения СКО σ_{sh} модельных флуктуаций $\delta\varphi_y$, $\delta\varphi_x$ рассчитываются на основе экспериментального значения СКО углового дрожания края солнечного диска, равного $3''$ [13, 14]: $(\langle\delta\varphi_x^2\rangle + \langle\delta\varphi_y^2\rangle)^{1/2} = \sqrt{2}\sigma_{sh}^2 = 3''$, откуда $\sigma_{sh} = 2,1''$. Турбулентные флуктуации $\delta\mathbf{t}_{CF}$ координат направляющего вектора \mathbf{s}_{CF} , $\delta\mathbf{t}_{CF} \perp \mathbf{s}_{CF}$ имеют вид:

$$\delta\mathbf{t}_{CF} = \begin{bmatrix} c_{\varphi_y} c_{\varphi_x} & -s_{\varphi_y} s_{\varphi_x} \\ 0 & -c_{\varphi_x} \\ -s_{\varphi_y} c_{\varphi_x} & -c_{\varphi_y} s_{\varphi_x} \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} s_{zCF} & s_{xCF} s_{yCF} / (1 - s_{yCF}^2)^{1/2} \\ 0 & -(1 - s_{yCF}^2)^{1/2} \\ -s_{xCF} & s_{zCF} s_{yCF} / (1 - s_{yCF}^2)^{1/2} \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{\varphi}.$$

Векторные координаты $\boldsymbol{\xi}$ изображения звезды без дисторсии связаны с ее направляющим вектором соотношениями (1), из которых получаются турбулентные флуктуации векторных координат:

$$\delta\boldsymbol{\xi}_{trb} = \frac{F}{s_{zCF}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & s_{xCF} / s_{zCF} \\ 0 & -1 & s_{yCF} / s_{zCF} \end{bmatrix} \delta\mathbf{t}_{CF} = \frac{F}{s_{zCF}} \begin{bmatrix} -(1 - s_{yCF}^2) / s_{zCF} & 0 \\ -s_{xCF} s_{yCF} / s_{zCF} & (1 - s_{yCF}^2)^{-1/2} \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{\varphi}.$$

После подстановки сюда (1) получается окончательное выражение для турбулентных флуктуаций векторных координат изображения звезды:

$$\delta \xi_{trb} = \mathbf{T} \delta \phi, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -(x^2 + F^2) / F & 0 \\ -xy / F & (x^2 + y^2 + F^2) / (x^2 + F^2)^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где \mathbf{T} – матрица распределения турбулентных флуктуаций угловых координат направляющего вектора в векторных координатах яркостного центра звезды. Ковариационную матрицу турбулентных флуктуаций запишем как

$$\mathbf{P}_{trb} = \langle \delta \xi_{trb} \delta \xi_{trb}^T \rangle = \sigma_{sh}^2 \mathbf{T} \mathbf{T}^T.$$

Вариация (1) по всем переменным приводит к погрешности определения координат направляющего вектора звезды из ее цифрового изображения:

$$\delta \mathbf{s}_{CF} = \frac{\mathbf{I}_3 - \mathbf{s}_{CF} (\mathbf{s}_{CF})^T}{((x^n)^2 + (y^n)^2 + F^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} -\delta \xi \\ \delta F \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{s}_{CF} \perp \mathbf{s}_{CF},$$

где $\delta \xi = \delta \xi_{trb} + \delta \xi_{dst}$ – флуктуационная погрешность определения векторных координат ξ яркостного центра звезды после коррекции дисторсии. Подставим сюда (7) и (8):

$$\begin{bmatrix} -\delta \xi \\ \delta F \end{bmatrix} = \mathbf{G}_1 \delta \eta_{ns} + \mathbf{G}_2 \delta \phi + \mathbf{G}_3 \delta \mathbf{p},$$

где $\mathbf{G}_1 = -\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 + \mathbf{C}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 0 & | & a(\mathbf{I}_2 + \mathbf{C}_1) & | & -\mathbf{C}_2 \\ 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline 1 & | & 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$\delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \check{\mathbf{p}} = [\delta F \ \delta h_o \ \delta w_o \ \delta k_1 \ \delta k_2]^T$ – погрешности калибровки элементов внутреннего ориентирования; $\check{\mathbf{p}}$ – истинный вектор, \mathbf{p} – калиброванный вектор, используемый в алгоритмах астродатчика. Окончательное выражение для флуктуационной погрешности направляющего вектора обнаруженной звезды примет вид:

$$\delta \mathbf{s}_{CF} = \frac{\mathbf{I}_3 - \mathbf{s}_{CF} (\mathbf{s}_{CF})^T}{(x^2 + y^2 + F^2)^{1/2}} (\mathbf{G}_1 \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{G}_2 \delta \phi + \mathbf{G}_3 \delta \mathbf{p}). \quad (9)$$

2. Модель измерений ориентации астродатчика

Пусть в изображении, полученном цифровой камерой астродатчика, обнаружены N_s отдельных звезд и вычислены координаты $\{\mathbf{s}_{CF}^n\}_{n=1}^{N_s}$ их единичных направляющих векторов. Все эти звезды распознаны, т.е. каждой звезде с номером $n = 1 \dots N_s$ соответствует запись звездного каталога, которой присвоен тот же номер n . Из этих записей вычислены координаты $\{\mathbf{g}_{GCRS}^n\}_{n=1}^{N_s}$ единичных направляющих векторов тех же самых звезд, но относительно инерциальной геоцентрической небесной системы координат GCRS (Geocentric Celestial Reference System). Задачей Вахбы для двух наборов координат $\{\mathbf{g}_{GCRS}^n\}_{n=1}^{N_s}$ и $\{\mathbf{s}_{CF}^n\}_{n=1}^{N_s}$ одного и того же пучка векторов называется задача нахождения ортогональной матрицы \mathbf{S}_{CF}^{GCRS} , при которой целевая функция

$$L(\mathbf{S}_{CF}^{GCRS}) = 0,5 \sum_{n=1}^{N_s} v_n |\mathbf{s}_{CF}^n - \mathbf{S}_{CF}^{GCRS} \mathbf{g}_{GCRS}^n|^2, \quad \text{где } \sum_{n=1}^{N_s} v_n = 1,$$

достигает минимального значения. Здесь $v_n > 0$ – веса отдельных измерений, которые далее полагаются равными, $v_n = 1/N_s$.

Для решения этой задачи вводится промежуточная матрица \mathbf{V} размером 3×3 , которая подвергается сингулярному разложению [4]:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{N_S} \sum_{n=1}^{N_S} \mathbf{s}_{CF}^n (\mathbf{g}_{GCRS}^n)^T = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T = \mathbf{U}_+ \mathbf{\Lambda}' \mathbf{V}_+^T,$$

где \mathbf{U}, \mathbf{V} – ортогональные матрицы размером 3×3 ; $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – диагональная матрица 3×3 , на главной диагонали которой расставлены неотрицательные сингулярные числа: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$; $\mathbf{U}_+ = \mathbf{U} \text{diag}(1, 1, \det(\mathbf{U}))$, $\mathbf{\Lambda}' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, d\lambda_3)$, $\mathbf{V}_+ = \mathbf{V} \text{diag}(1, 1, \det(\mathbf{V}))$; $d = \det(\mathbf{U})\det(\mathbf{V}) = \pm 1$. Решением задачи Вахбы является матрица

$$\mathbf{S}_{CF}^{GCRS} = \mathbf{U}_+ \mathbf{V}_+^T = \mathbf{U} \text{diag}(1, 1, d) \mathbf{V}^T \approx (\mathbf{I}_3 - [\mathbf{\theta} \times]) \check{\mathbf{S}}_{CF}^{GCRS},$$

где $\check{\mathbf{S}}_{CF}^{GCRS}$ – истинная матрица ориентации астродатчика; $\mathbf{\theta} = [\theta_x \ \theta_y \ \theta_z]^T$ – вектор малых погрешностей астродатчика; $[\mathbf{\theta} \times]$ – кососимметричная матрица векторного умножения $\mathbf{\theta} \times \mathbf{b} = [\mathbf{\theta} \times] \mathbf{b}$:

$$[\mathbf{\theta} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Для строгого расчета значения $\mathbf{\theta}$ нужно знать истинные значения каталожных $\{\mathbf{g}_{GCRS}^n\}_{n=1}^{N_S}$ и наблюдаемых $\{\mathbf{s}_{CF}^n\}_{n=1}^{N_S}$ координат. Они неизвестны, поэтому далее будет вычисляться оценка вектора $\mathbf{\theta}$ путем подстановки в формулу [4(33)] расчетных $\{\mathbf{g}_{GCRS}^n\}_{n=1}^{N_S}$ и измеренных $\{\mathbf{s}_{CF}^n\}_{n=1}^{N_S}$ координат:

$$\mathbf{\theta} = \mathbf{K} \sum_{n=1}^{N_S} [\mathbf{s}_{CF}^n \times] (\mathbf{S}_{CF}^{GCRS} \delta \mathbf{g}_{GCRS}^n - \delta \mathbf{s}_{CF}^n),$$

где $\delta \mathbf{g}_{GCRS}^n = \mathbf{g}_{GCRS}^n - \check{\mathbf{g}}_{GCRS}^n$ – погрешность вычисления каталожных координат, $\delta \mathbf{s}_{CF}^n = \mathbf{s}_{CF}^n - \check{\mathbf{s}}_{CF}^n$ – погрешность наблюдения; $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_2 + d\lambda_3, \lambda_1 + d\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2)$; $\mathbf{K} = (\mathbf{U}_+ \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}_+^T) / N_S$ – матричный коэффициент размером 3×3 .

В современных звездных каталогах координаты звезд заданы в инерциальной барицентрической небесной системе координат BCRS (Barycentric Celestial Reference System) с началом в центре масс Солнечной системы [31]. Погрешность $\delta \mathbf{g}_{GCRS}^n$ включает в себя погрешности табличных значений координат звезд в BCRS и погрешности преобразования направляющего вектора из BCRS в GCRS. Погрешность табличных значений не превышает $0,01''$. Погрешность преобразования вектора между системами координат содержит погрешности учета релятивистской абберации от движения астродатчика и годичного параллакса звезд. Абберацию можно разложить на две составляющие – от орбитального движения Земли и суточного вращения Земли. Первая составляющая довольно велика – она может достигать $20''$ и обязательно учитывается при преобразовании координат. Вторая составляющая абберации и годичный параллакс совместно дают погрешность преобразования координат не более $1''$, и им можно пренебречь [9]. В результате окончательная формула для погрешности астродатчика приобретает вид:

$$\mathbf{\theta} = -\mathbf{K} \sum_{n=1}^{N_S} [\mathbf{s}_{CF}^n \times] \delta \mathbf{s}_{CF}^n. \quad (10)$$

Полная погрешность астродатчика получается подстановкой (9) в (10) и разлагается на флуктуационную составляющую $\boldsymbol{\varepsilon}$ и систематическое смещение нуля астродатчика \mathbf{b} :

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{b}, \quad (11)$$

$$\text{где } \boldsymbol{\varepsilon} = -\mathbf{K} \sum_{n=1}^{N_s} \frac{[\mathbf{s}_{CF}^n \times](\mathbf{G}_1^n \delta \boldsymbol{\eta}_{ns} + \mathbf{G}_2^n \delta \boldsymbol{\varphi})}{((x^n)^2 + (y^n)^2 + F^2)^{1/2}}, \quad \mathbf{b} = -\mathbf{K} \sum_{n=1}^{N_s} \frac{[\mathbf{s}_{CF}^n \times] \mathbf{G}_3^n}{((x^n)^2 + (y^n)^2 + F^2)^{1/2}} \delta \mathbf{p}; \quad \mathbf{G}_1^n, \mathbf{G}_2^n,$$

\mathbf{G}_3^n – матрицы из (9), рассчитанные для звезды с номером $n = 1 \dots N_s$. Ковариационные матрицы составляющих погрешности астродатчика представим следующим образом:

$$\mathbf{P}_b = \langle \mathbf{b} \mathbf{b}^T \rangle = \mathbf{K} \left(\sum_{n=1}^{N_s} \frac{[\mathbf{s}_{CF}^n \times] \mathbf{G}_3^n \mathbf{P}_{\delta p} \mathbf{G}_3^{nT} [\mathbf{s}_{CF}^n \times]^T}{(x^n)^2 + (y^n)^2 + F^2} \right) \mathbf{K}, \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_\varepsilon = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \rangle = \mathbf{K} \left(\sum_{n=1}^{N_s} \frac{[\mathbf{s}_{CF}^n \times](\mathbf{G}_1^n \mathbf{P}_{ns} \mathbf{G}_1^{nT} + \sigma_\varphi^2 \mathbf{G}_2^n \mathbf{G}_2^{nT})[\mathbf{s}_{CF}^n \times]^T}{(x^n)^2 + (y^n)^2 + F^2} \right) \mathbf{K},$$

где $\mathbf{P}_{\delta p}$ – ковариационная матрица погрешностей в значениях элементов внутреннего ориентирования, рассчитываемая в результате калибровки. Матрицы \mathbf{P}_b и \mathbf{P}_ε зависят от конфигурации звезд в наблюдаемом созвездии.

Интерпретация выражения (12) зависит от способа применения астродатчика в навигационной системе. Если астродатчик задействуется как самостоятельный измеритель, то выражение (12) описывает погрешность отдельного измерения ориентации с ковариационной матрицей $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_\varepsilon$. Если измерения астродатчика используются в сильносвязанной астронавигационной системе, в которой, кроме ориентации, оцениваются параметры модели погрешностей корректирующих измерителей, то (12) можно переписать в форме уравнения наблюдения

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{H}_{\delta p} \delta \mathbf{p} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathbf{H}_{\delta p} = -\mathbf{K} \sum_{n=1}^{N_s} \frac{[\mathbf{s}_{CF}^n \times] \mathbf{G}_3^n}{((x^n)^2 + (y^n)^2 + F^2)^{1/2}}$ – матричный блок размером 3×5 , через который выполняется наблюдение за вектором погрешностей $\delta \mathbf{p}$, входящим в полный вектор погрешностей априорной оценки вектора состояния комплексирующего фильтра; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – шум наблюдения с ковариационной матрицей \mathbf{P}_ε .

3. Экспериментальная проверка модели погрешностей

Модель погрешностей астродатчика проверена на экспериментальных данных, полученных в процессе наземной калибровки камеры [32]. Процесс калибровки состоял из шести независимых наблюдательных сеансов, каждый из которых длился около одного часа. Камера жестко закреплялась на наземном основании, направления ее оптической оси в различных сеансах не совпадали друг с другом. В одном из сеансов оптическая ось камеры была направлена в зенит (зенитный сеанс), в этом случае погрешности коррекции атмосферной рефракции близки к нулю.

Условия наблюдения во всех сеансах позволяли устойчиво обнаруживать и распознавать 50-60 отдельных звезд 4-7 звездной величины в каждом кадре. Изображение,

составленное из ярких центров всех звезд из всех кадров зенитного сеанса, показано на рис. 2. Эксперимент проводился в пригороде, и для расчета уровня оптического фона принята яркость ясного ночного неба $m^{bg} = 21^m/\text{угл. с}^2$, что соответствует 4-му уровню светового загрязнения неба по шкале [33]. СКО оптического фона при таком способе задания яркости ночного неба примет вид

$$\sigma_{ob} = \sqrt{T_E \times \Omega_{pix} \times P_e^V \times 10^{-\frac{m^{ob} - m^V}{2,5}}},$$

$$\Omega_{pix} = \left(\frac{a}{F} \times \frac{180^\circ}{\pi} \times 3600 \right)^2,$$

где Ω_{pix} – телесный угол пикселя [угл. с²]; m^V, P_e^V – звездная величина (блеск) и мощность опорной звезды. Энергетические характеристики экспериментальной камеры и условий наблюдения перечислены в табл. 1, при этом энергетические единицы измерения (Дж и Вт = Дж/с) приведены к числу электронов (e^- и $e^-/с$) в зарядовой емкости фотоприемной ячейки [28].

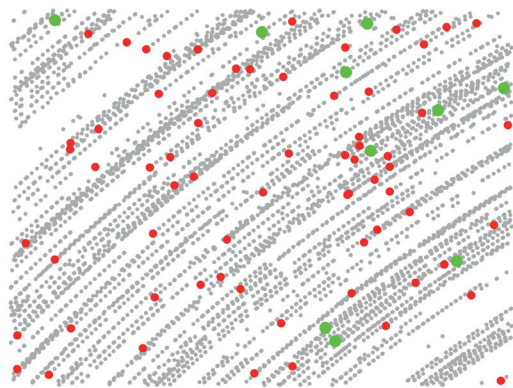


Рис. 2. Изображения ярких центров всех звезд, обнаруженных и распознанных в зенитном сеансе (серые точки). Красными точками обозначены яркие центры звезд, распознанных в первом кадре, зелеными – 10 ярчайших звезд первого кадра

Т а б л и ц а 1

Энергетические характеристики эксперимента

Параметр	Обозначение	Значение
Фокусное расстояние	F	106,0 мм
Линейный размер пикселя	a	3,45 мкм
Угловой размер пикселя	a/F	6,7 угл. с
Телесный угол пикселя	Ω_{pix}	45,1 угл. с ²
Время экспозиции	T_E	0,2 с
СКО шума считывания	s_{rd}	2,7 e^-
Темновой ток	i_{dc}	46,1 $e^-/с$
Шаг квантования	QS	40,4 e^-
СКО дрожания звезд	s_{sh}	2,1 ²
Блеск оптического фона	m^{bg}	21,0 ^m /угл. с ²
СКО оптического фона	s_{ob}	0,1 e^-
Блеск опорной звезды	m^V	0,03 ^m
Мощность опорной звезды	P_e^V	$1,52 \times 10^6 e^-/с$

Для каждого сеанса было рассчитано отдельное значение вектора калибруемых элементов внутреннего ориентирования. Показателем качества калибровки служили остаточные невязки калибровочных измерений

$$\delta \xi_{res}^n = [\delta x_{res}^n \ \delta y_{res}^n]^T = \xi^n - \xi_{est}^n,$$

где ξ^n – векторные координаты яркостного центра изображения звезды n ; ξ_{cut}^n – векторные координаты проекции этой же звезды на плоскость МФП, рассчитанные из звездного каталога. СКО остаточных невязок, вычисленное по всем звездам всех кадров отдельно для каждого калибровочного сеанса, составляло 0,2 пикселя, или 1,4". Близость СКО остаточных невязок в различных сеансах заставляет равноправно рассматривать все шесть значений калибруемого вектора: любой из этих векторов может оказаться истинным в процессе эксплуатации астродатчика.

Одновременно с полезными параметрами внутреннего ориентирования в процессе калибровки определялись мешающие параметры – три угла ориентации камеры в момент съемки каждого кадра, которые в данном расчете полагаются углами истинной ориентации камеры и используются для вычисления истинной матрицы $\tilde{\mathbf{S}}_{CF}^{GCRS}$. За истинный вектор $\tilde{\mathbf{p}}$ элементов внутреннего ориентирования принят вектор, откалиброванный в зенитном сеансе. Для имитации погрешности калибровки используется смещенный вектор \mathbf{p} , полученный усреднением результатов калибровки по всем шести сеансам. Вектор погрешности калибровки, выраженный в относительных единицах, запишем следующим образом:

$$(\delta\mathbf{p} / \tilde{\mathbf{p}}) \times 100\% = [-0,0021\% \quad 0,1224\% \quad -0,0319\% \quad -1,2823\% \quad 39,0162\%]^T.$$

Для анализа флуктуационных погрешностей астродатчика все векторы $\delta\xi_{res}^n$, полученные во всех кадрах зенитного сеанса, были выстроены в порядке возрастания каталожных звездных величин m^n . В результате был построен график, приведенный на рис. 3, а. На нем слева расположены невязки, соответствующие наиболее ярким звездам (малые звездные величины), а справа – наиболее тусклым (большие звездные величины). На графики рис. 3, а. наложены значения среднеквадратических флуктуационных погрешностей определения векторных координат $\sigma_{ns}^n = \sqrt{\mathbf{P}_{ns}^n(1,1)}$, обусловленных электронными шумами изображения, и $\sigma_{trb}^n = \sqrt{\mathbf{P}_{ns}^n(1,1) + \mathbf{P}_{trb}^n(1,1)}$, в которых учтены дрожания звезд. Из рисунка видно, что для астродатчика, неподвижного внутри атмосферы, основным источником флуктуационных погрешностей являются дрожания звезд, а не электронные шумы в значениях отдельных пикселей.

Векторы погрешностей астродатчика $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = [\tilde{\theta}_x \quad \tilde{\theta}_y \quad \tilde{\theta}_z]^T$ для истинного $\tilde{\mathbf{p}}$ и $\boldsymbol{\theta} = [\theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z]^T$ для смещенного \mathbf{p} векторов восстанавливаются из выражений

$$[\tilde{\boldsymbol{\theta}} \times] \approx \mathbf{I}_3 - \mathbf{S}_{CF}^{GCRS}(\tilde{\mathbf{p}})(\tilde{\mathbf{S}}_{CF}^{GCRS})^T,$$

$$[\boldsymbol{\theta} \times] \approx \mathbf{I}_3 - \mathbf{S}_{CF}^{GCRS}(\mathbf{p})(\tilde{\mathbf{S}}_{CF}^{GCRS})^T,$$

где $\mathbf{S}_{CF}^{GCRS}(\tilde{\mathbf{p}})$, $\mathbf{S}_{CF}^{GCRS}(\mathbf{p})$ – матрицы ориентации астродатчика, полученные из решения задачи Вахбы на основе данных по одним и тем же звездам в одном и том же кадре, но с разными элементами внутреннего ориентирования. Вектор $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ содержит только флуктуационную составляющую погрешности, а вектор $\boldsymbol{\theta}$ дополнительно включает в себя смещение нуля \mathbf{b} .

Графики компонент вектора $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ показаны на рис. 3, б. Жирными линиями выделены графики погрешностей расчета ориентации по всем звездам, распознанным в кадре ($N_s \geq 50$), светлыми линиями – погрешности при использовании для расчета первых 3...10 ярчайших звезд. На графики погрешностей наложены графики СКО $\sigma_{\theta_x} = \sqrt{\mathbf{P}_{\theta}(1,1)}$, $\sigma_{\theta_y} = \sqrt{\mathbf{P}_{\theta}(2,2)}$, $\sigma_{\theta_z} = \sqrt{\mathbf{P}_{\theta}(3,3)}$, рассчитанные для $N_s = 3$ (красный график с кружками) и для $N_s = 10$ (желтый график с квадратами) ярчайших звезд

в кадре. Флуктуационные погрешности углов наклона астродатчика (компоненты $\check{\theta}_x$ и $\check{\theta}_y$) для такого количества звезд получились заметно меньше, чем погрешность угла поворота астродатчика ($\check{\theta}_z$), что является характерной особенностью его работы [34]. Более высокая погрешность ориентации в левой части рис. 3, б для $N_S = 3$ связана с неудачной конфигурацией трех ярчайших звезд в поле зрения камеры, а не со сходимостью какого-то внутреннего оценивающего фильтра.

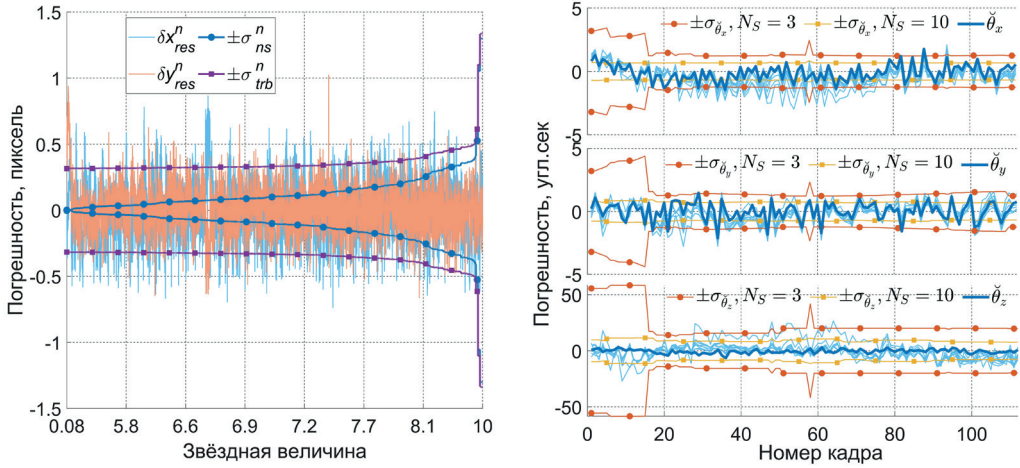


Рис. 3. Флуктуационные погрешности астродатчика:

- а) остаточные невязки после калибровки элементов внутреннего ориентирования;
- б) компоненты вектора погрешности астродатчика для различного числа обрабатываемых звезд

Графики модулей погрешностей ориентации $|\check{\theta}|$ и $|\theta|$ показаны на рис. 4, а. Жирными линиями выделены графики погрешностей при использовании для расчета ориентации астродатчика всех звезд, распознанных в кадре, светлыми – погрешности при использовании первых 3...10 ярчайших звезд. Погрешность $|\theta|$ обусловлена исключительно остаточными невязками после калибровки – это минимальная погрешность рассматриваемого астродатчика в реальных условиях эксплуатации.

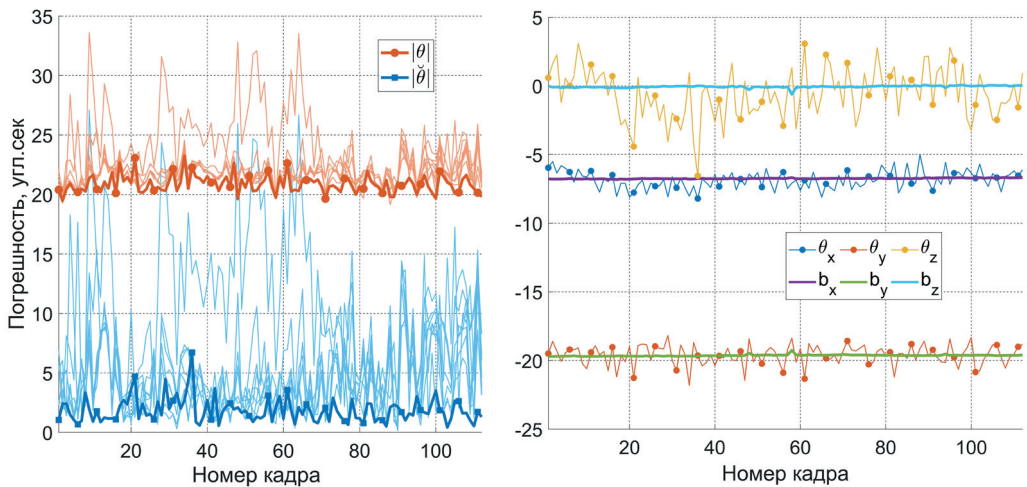


Рис. 4. Погрешности астродатчика в зенитном сеансе: а) модули вектора погрешностей для истинного и смещенного векторов элементов внутреннего ориентирования; б) координаты вектора погрешностей и смещения нуля

Графики компонент векторов θ и $\mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z]^T$ показаны на рис. 4, б. Компоненты вектора θ содержат шумовую составляющую, сосредоточенную вокруг компонент вектора смещения нуля \mathbf{b} . Из этих графиков видно, что в данном случае погрешности калибровки элементов внутреннего ориентирования мало влияют на погрешность определения поворота астродатчика (компонента b_z), но заметно искажают измеренные углы его наклона (компоненты b_x, b_y).

Заключение

В работе построена линеаризованная модель погрешностей астродатчика, в которой учитываются электронные шумы в цифровом изображении звезд и погрешности калибровки элементов внутреннего ориентирования. Для астродатчиков атмосферного применения модель дополнена погрешностями измерения видимых направлений на звезды, возникающими из-за атмосферной турбулентности. В модели не учитываются погрешности, связанные со смазами в изображениях звезд, т.е. она применима в условиях медленного вращения астродатчика, когда угол поворота поля зрения за время экспозиции не превышает половины углового размера пикселя.

Экспериментальная проверка построенной модели показывает, что даже для исправного атмосферного астродатчика значения элементов внутреннего ориентирования могут заметно отклоняться от их же значений, полученных при заводской калибровке. Эти отклонения невелики в относительных величинах, но приводят к заметным систематическим погрешностям в измерениях ориентации по звездам. Для устранения этих погрешностей необходима регулярная калибровка элементов внутреннего ориентирования в процессе эксплуатации. Если элементы внутреннего ориентирования включены в вектор состояния некоторого оценивающего фильтра для эксплуатационной калибровки, то разработанная модель измерений может быть непосредственно использована для синтеза уравнений наблюдения этого фильтра.

Полученные значения погрешностей ориентации, измеренной астродатчиком, могут показаться слишком малыми, чтобы их учитывать при решении практических навигационных задач. Для правильной интерпретации этих величин нужно иметь в виду, что основной задачей астродатчика является не измерение ориентации относительно звезд, а получение данных для вычисления позиции наблюдателя относительно Земли. В этом случае угловая погрешность астродатчика $|\theta|$ превращается в погрешность однократного измерения позиции $|\theta| \times R_{\oplus}$ (где $R_{\oplus} \approx 6370$ км – радиус Земли), что составляет 155 м при $|\theta| = 5''$ и 618 м при $|\theta| = 20''$. Иначе говоря, с точки зрения позиционирования астродатчик – очень грубый навигационный прибор по сравнению с приемниками спутниковых навигационных систем.

Приложение. Интегрирование ФРТ по площадке фотоприемной ячейки

Для сокращения обозначений запишем гауссову ФРТ в форме

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\alpha\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\alpha}\right),$$

где $\alpha = 2\sigma_A^2$, $x = a(h - (\hat{h}_c + \delta h))$, $y = a(w - (\hat{w}_c + \delta w))$; (\hat{h}_c, \hat{w}_c) – растровые индексы ячейки, в которой расположен максимум ФРТ; $\delta h, \delta w$ – смещение максимума

ФРТ относительно левого верхнего угла ячейки (\hat{h}_c, \hat{w}_c). Уровень сигнала в ячейке с растровыми индексами ($\hat{h}_c + \hat{p}, \hat{w}_c + \hat{q}$) пропорционален интегралу от $\Phi(x, y)$ по площадке этой ячейки:

$$\hat{\Phi}(\hat{p}, \hat{q}) = \int_{a(\hat{p}-\delta h)}^{a(\hat{p}+1-\delta h)} dx \int_{a(\hat{q}-\delta w)}^{a(\hat{q}+1-\delta w)} dy \Phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \left[\int_{a(\hat{p}-\delta h)}^{a(\hat{p}+1-\delta h)} e^{-\frac{x^2}{\alpha}} \frac{dx}{\sqrt{\alpha}} \times \int_{a(\hat{q}-\delta w)}^{a(\hat{q}+1-\delta w)} e^{-\frac{y^2}{\alpha}} \frac{dy}{\sqrt{\alpha}} \right].$$

После замены переменных интегрирования $x' = x\alpha^{-0.5}$, $y' = y\alpha^{-0.5}$ это выражение переписывается в виде

$$\hat{\Phi}(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a(\hat{p}-\delta h)}{\sqrt{\alpha}}}^{\frac{a(\hat{p}+1-\delta h)}{\sqrt{\alpha}}} e^{-x'^2} dx' \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a(\hat{q}-\delta w)}{\sqrt{\alpha}}}^{\frac{a(\hat{q}+1-\delta w)}{\sqrt{\alpha}}} e^{-y'^2} dy' \right].$$

Интегралы в этом произведении выражаются через стандартную функцию ошибки $\text{erf}(x)$:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_b^a e^{-x^2} dx = \text{erf}(a) - \text{erf}(b), \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Отсюда

$$\hat{\Phi}(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{1}{4} \left[\text{erf} \left(\frac{a(\hat{p}+1-\delta h)}{\sqrt{\alpha}} \right) - \text{erf} \left(\frac{a(\hat{p}-\delta h)}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \times \left[\text{erf} \left(\frac{a(\hat{q}+1-\delta w)}{\sqrt{\alpha}} \right) - \text{erf} \left(\frac{a(\hat{q}-\delta w)}{\sqrt{\alpha}} \right) \right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аванесов Г.А., Бессонов Р.В., Куркина А.Н., Мыслик Е.А., Лискив А.С., Людомирский М.Б., Каюгин И.С., Ямщиков Н.Е. Разработка автономной бесплатформенной астроинерциальной навигационной системы // *Механика, управление и информатика*. 2013. № 1(13). С. 9–29. EDN RHDMPZ.
2. Степанов О.А., Кошаев Д.А. Исследование методов решения задачи ориентации с использованием спутниковых систем // *Гироскопия и навигация*. 1999. № 2(25). С. 30–55. EDN SNGILN.
3. Shuster, M.D., Oh, S.D., Three-axis attitude determination from vector observations, *Journal of Guidance and Control*, 1981, vol. 4, no. 1, pp. 70–77. DOI: 10.2514/3.19717.
4. Markley, F.L., Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition, *Journal of The Astronautical Sciences*, 1988, vol. 36, no. 3, pp. 245–258.
5. Markley, F.L., Crassidis, J.L., *Fundamentals of spacecraft attitude determination and control*, New York: Springer, 2014, 495 p., doi 10.1007/978-1-4939-0802-8.
6. Голован А.А., Моргунова С.Н., Соловьев И.В., Шатский М.А. Декомпозированный алгоритм оценки ориентации космического аппарата в режиме астрокоррекции // *Гироскопия и навигация*. 2022. Том 30, № 4(119). С. 71–86. DOI 10.17285/0869-7035.00104. EDN YYESYG.
7. Ивонин А.Н., Камальдинова Р.А., Моргунова С.Н., Соколов В.Н., Соловьев И.В., Шатский М.А. Алгоритм оценки ориентации космического аппарата «Спектр-УФ» для режима прецизионного наведения оси телескопа // *Авиакосмическое приборостроение*. 2020. № 12. С. 13–25. DOI 10.25791/aviakosmos.12.2020.1192. EDN QUXIXD.
8. Cheng, Y., Crassidis, J.L., Markley, F.L., Attitude estimation for large field-of-view sensors, *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2006, vol. 54, no. 3–4, pp. 433–448, doi 10.1007/BF03256499.
9. Василюк Н.Н. Векторная коррекция скоростной абберации для внутриатмосферного звездного датчика ориентации // *Авиакосмическое приборостроение*. 2022. № 10. С. 17–31. DOI 10.25791/aviakosmos.10.2022.1302. EDN CQYWHW.

10. **Василюк Н.Н.** Векторная коррекция атмосферной рефракции для внутриаимосферного звездного датчика ориентации // *Авиакосмическое приборостроение*. 2022. № 9. С. 31–44. DOI 10.25791/aviakosmos.9.2022.1299. EDN VFGMCC.
11. **Соловьев И.В.** Обнаружение и оценивание координат изображений звезд в датчиках астроориентации с помощью алгоритмов прогноза и фильтрации Калмана // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2013. № 11. С. 59–63. EDN RIECIP.
12. **Tuchin, M., Biryukov, A., Nickiforov, M., Prokhorov, M., Zakharov, A.,** On random and systematic errors of a star tracker, *Proceedings of the 27th AIAA/USU Conference on Small Satellites, Advanced Technologies I*, 2013, SSC13-I-10, <https://digitalcommons.usu.edu/smallsat/2013/all2013/52/>.
13. **Гаранин С.Г., Зыков Л.И., Климов А.Н., Куликов С.М., Смышляев С.П., Степанов В.В., Сюндюков А.Ю.** Дневное наблюдение звезд слабой яркости (7m–8m) с равнинной местности // *Оптический журнал*. 2017. Т. 84. № 12. С. 30–37. EDN ZVQHYL.
14. **Лукин В.П., Носов В.В.** Измерение дрожания изображения протяженного некогерентного источника излучения // *Квантовая электроника*. 2017. Т.47. № 6. С. 580–588. EDN YUFFCN.
15. **Сметанин П.С., Аванесов Г.А., Бессонов Р.В., Куркина А.Н., Никитин А.В.** Геометрическая калибровка звездного датчика высокой точности по звездному небу // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*. 2017. Том 14. № 2. С. 9–23. DOI 10.21046/2070-7401-2017-14-2-9-23. EDN YRFDFF.
16. **Базина Е.А., Бессонов Р.В., Брысин Н.Н., Никитин А.В., Прохорова С.А., Сливко Н.А., Строилов Н.А., Юматов Б.А.** Математическая модель стенда определения элементов внутреннего ориентирования // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*. 2018. Том 15. № 6. С. 131–144. DOI 10.21046/2070-7401-2018-15-6-131-144. EDN YROZDN.
17. **Chen, Z., Zheng, Y., Zhan, Y., Li, C., Chen, B., Zhang, H.,** Distortion model of star tracker on-orbit calibration algorithms based on interstar angles, *Journal of Physics: Conference Series*, 2022, vol. 2235, 0120533, doi 10.1088/1742-6596/2235/1/012053.
18. **Chen, X., Xing, F., You, Z., Zhong, X., Qi, K.,** On-orbit high-accuracy geometric calibration for remote sensing camera based on star sources observation, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2022, vol. 60, pp. 1–11, doi 10.1109/TGRS.2021.3100841.
19. **Enright, J., Jovanovic, I., Vaz, B.,** Autonomous recalibration of star trackers, *IEEE Sensors Journal*, 2018, vol. 18, no. 18, pp. 7708–7720, doi 10.1109/JSEN.2018.2857621.
20. **Федосеев В.И. Колосов М.П.** Оптико-электронные приборы ориентации и навигации космических аппаратов. М.: Логос, 2007. 247 с. EDN QNUUAZ.
21. **Аванесов Г.А., Кондратьева Т.В., Никитин А.В.** Исследование смещения энергетического центра изображений звезд относительно геометрического центра на ПЗС-матрице и коррекция методической ошибки // *Механика, управление и информатика*. 2009. № 1. С. 421–446. EDN OJSJGD.
22. **Brown, D.C.,** Decentering distortion of lenses, *Photogrammetric engineering and remote sensing*, 1966, vol. 32, no. 3, pp. 444–462.
23. **Лобанов А.Н.** Фотограмметрия: учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М., Недра, 1984. 552 с.
24. **Баранов П.С., Манцетов А.А.** Оптимизация отношения радиуса кружка рассеяния объектива к размеру пиксела для повышения точности оценки координат изображений малоразмерных объектов // *Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника*. 2016. № 2. С. 49–53. EDN WBXGTD.
25. **Захаров А.И., Никифоров М.Г.** Систематические и случайные ошибки определения положения фотоцентров звезд на матричных фотоприемниках // *Механика, управление и информатика*. 2011. №2. С. 280–288. EDN OJSJXB.
26. **Строилов Н.А., Купцов Т.В., Базина Е.А., Никитин А.В., Эльяшев Я.Д., Юматов Б.А.** Определение функции рассеяния точки оптической системы звездных датчиков // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*. 2022. Том 19. № 6. С. 41–49. DOI 10.21046/2070-7401-2022-19-6-41-49. EDN JYZSQB.
27. **Василюк Н.Н.** Синтез ядра вращательного смаза в цифровом изображении с использованием измерений трехосного гироскопа // *Компьютерная оптика*. 2022. Т. 46 № 5. С. 763–773. DOI 10.18287/2412-6179-CO-1081. EDN ABNHW.
28. **Василюк Н.Н.** Коррекция вращательного смаза в изображениях звезд, наблюдаемых астроинерциальным датчиком ориентации на фоне дневного неба // *Компьютерная оптика*. 2023. Том 47. №1. С. 79–91. DOI 10.18287/2412-6179-CO-1141. EDN QSKZQP.
29. **Аванесов Г.А., Строилов Н.А., Филиппова О.В., Шамис В.А., Эльяшев Я.Д.** Фотометрическая модель звездного датчика ориентации // *Современные проблемы дистанционного зондиро-*

- вания Земли из космоса. 2019. Том 16. № 5. С. 75–84. DOI 10.21046/2070-7401-2019-16-5-75-84. EDN QDWYGA.
30. Бирюков А.В., Захаров А.И., Крусанова Н.Л., Миронов А.В., Мошкалёв В.Г., Николаев Ф.Н., Прохоров М.Е., Тучин М.С. Расчет блеска звезд в спектральной полосе кремниевого фотоприемника звездного датчика по данным каталогов Tycho-2 и 2MASS // Механика, управление и информатика. 2013. №1 (13). С. 243–248. EDN RHDNDV.
31. ESA, 1997, The Hipparchos and Tycho catalogues, ESA SP-1200.
32. Василюк Н.Н., Нефедов Г.А., Сидорова Е.А., Шагимуратова Н.О. Калибровка элементов внутреннего ориентирования цифровой камеры астродатчика по наземным наблюдениям звезд: учет атмосферной рефракции и абберации света // Измерительная техника. 2023. №8. С. 42–52. DOI 10.32446/0368-1025it.2023-8-42-52. EDN LLSGQW.
33. Bortle, J.E., Introducing the Bortle Dark-Sky Scale, *Sky & Telescope*, 2001, vol. 101, pp. 126–138.
34. Василюк Н.Н. Геометрические ограничения точности векторного датчика ориентации, построенного на матричном приемнике оптического изображения // Авиакосмическое приборостроение. 2011. № 6. С. 17–24. EDN SYATAХ.
-

Vasilyuk, N.N. (SPC Elektrooptika, LLC, Moscow, 107076 Russia)

Star tracker errors model, taking into account the calibration errors of intrinsic elements of a digital camera, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2024, vol. 32, no. 1 (124), pp. 53–71.

Abstract. The star tracker error model is presented as a decomposition into fluctuation and systematic errors. The fluctuation error arises when calculating the coordinates of the brightness center of the digital star image and is due to the discrete structure of the signal in the image sensor. If the observation of stars is performed through the atmosphere, the fluctuation error has an additional external component associated with the “trembling” of star images due to atmospheric turbulence. The systematic error arises due to errors in the calibration of intrinsic elements of a digital camera. For all components of the attitude error, linearized analytical expressions and covariance matrices are obtained, depending on the configuration of the observed constellation. The error model can be easily rewritten in the form of the camera intrinsics calibration errors observation equation in a tightly-coupled astronavigation system. The results of experimental verification of the developed error model are presented. The numerical values of the errors obtained in the experiment clearly show the need for regular calibrations of the intrinsic elements of the star tracker’s digital camera during operation.

Key words: star tracker, errors model, centroid, stars trembling, distortion calibration, observation equation.

Материал поступил 12.09.2023