

А. А. МАСЛОВ, Д. А. МАСЛОВ, И. В. МЕРКУРЬЕВ

МАСШТАБНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА ПРИ ФУНКЦИОНИРОВАНИИ В РЕЖИМЕ ДАТЧИКА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ КОМПЕНСАЦИОННОГО ТИПА

В статье исследуется динамика волнового твердотельного гироскопа при функционировании в режиме датчика угловой скорости компенсационного типа. Используется математическая модель вынужденных колебаний резонатора. При помощи метода усреднения Крылова–Боголюбова изучена динамика гироскопа в медленных переменных, измеряемых электронным контуром прибора. Получена формула для определения масштабного коэффициента неидеального резонатора гироскопа в рассматриваемом режиме функционирования. Показано, что величина измеряемой скорости и масштабный коэффициент гироскопа в этом случае зависят от коэффициента обратной связи, диапазона измеряемых скоростей, анизотропии упругих и демпфирующих свойств резонатора и других параметров. Выполнено численное моделирование процесса съема информации в рассматриваемом режиме функционирования гироскопа. Получены формулы относительных погрешностей масштабного коэффициента, вызванных изменением параметров гироскопа. Приведены числовые примеры.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, датчик угловой скорости, масштабный коэффициент.

Введение

В настоящее время большое внимание уделяется вопросам совершенствования волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) для измерения угловой скорости объектов

Маслов Александр Анатольевич. Кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, НИУ «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ») (Москва).

Маслов Дмитрий Александрович. Кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, НИУ «МЭИ».

Меркурьев Игорь Владимирович. Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, НИУ «МЭИ». Действительный член международной общественной организации «Академия навигации и управления движением».

различного назначения [1–3]. Принцип функционирования ВТГ основан на эффекте инертности упругих волн колебаний осесимметричного резонатора, выполненного в виде упругого кольца либо осесимметричной упругой оболочки [4, 5]. В конструкциях ВТГ обычно используют тонкостенные полусферические [6–10], цилиндрические [11–13] и кольцевые [14–17] резонаторы.

Полусферический резонатор изготавливается из кварцевого стекла, обладающего высокими изотропными свойствами и добротностью. Металлизированная поверхность резонатора вместе с электродами образует электростатические датчики управления и съема информации. Применяемые в бесплатформенных инерциальных навигационных системах ВТГ с полусферическим резонатором относятся к типу приборов высокой и средней точности, ВТГ с цилиндрическим резонатором – средней и низкой [18]. Широкое распространение получили приборы с пьезоэлектрическими датчиками, наклеенными на металлический цилиндрический резонатор [19]; такое решение снижает добротность резонатора, а вследствие этого и точность гироскопа.

ВТГ с кольцевым резонатором представляет собой микромеханическое устройство [21, 22]. Микроэлектромеханические технологии позволяют производить недорогие приборы малых размеров с низким энергопотреблением. Вместе с тем наличие упругих торсионов, поддерживающих кольцевой резонатор, значительно уменьшает добротность колебательного контура, что приводит к увеличению погрешности гироскопа.

В [23] показано, что в зависимости от реализации схемы управления стоячей волной прибор может функционировать в двух режимах – датчика угла (интегрирующий гироскоп) или датчика угловой скорости (ДУС). Обычно ВТГ с кварцевым полусферическим резонатором работает в режиме датчика угла или ДУС, а гироскопы с цилиндрическим и кольцевым резонаторами – в режиме ДУС.

Одной из важнейших точностных характеристик гироскопа является масштабный коэффициент и его стабильность и нелинейность.

Масштабный коэффициент ВТГ в режиме ДУС определяется как отношение выходного сигнала, которым обычно является напряжение, к внешнему воздействию (угловой скорости). Он зависит от геометрических параметров, формы и добротности резонатора, коэффициента усиления обратной связи, температуры, диапазона измеряемых угловых скоростей и др. [19, 24, 25]. Масштабный коэффициент ВТГ в режиме ДУС рассматривался в работах [19, 20, 26–30]. В [19, 20] описан процесс калибровки масштабного коэффициента при различных температурах. В [26] представлен алгоритм калибровки ВТГ, основанный на применении нейронных сетей и обеспечивающий компенсацию погрешности масштабного коэффициента при различных температурах. Зависимость масштабного коэффициента от температуры рассматривалась также в статье [27]. В работах [28, 29] изучено влияние угловой скорости и коэффициента обратной связи на нелинейность масштабного коэффициента. В [30] рассматривается зависимость масштабного коэффициента от разночастотности и разнодобротности резонатора, но без учета влияния коэффициента обратной связи, добротности резонатора, угловой скорости основания прибора и частотной настройки.

В настоящей работе исследуется влияние на масштабный коэффициент ВТГ в режиме ДУС не только разночастотности и разнодобротности резонатора, но и коэффициента обратной связи, добротности резонатора, угловой скорости основания прибора и частотной настройки на масштабный коэффициент преобразования ВТГ в режиме ДУС.

Статья имеет следующую структуру. Вначале приведены уравнения динамики колебаний резонатора. Далее исследуется динамика резонатора ВТГ при функционировании в режиме ДУС компенсационного типа. Затем получена формула для вычисления масштабного коэффициента ВТГ в режиме ДУС. Наконец, в следующих разделах анализируется влияние на масштабный коэффициент ВТГ изменений различных параметров: коэффициента обратной связи, диапазона измеряемой скорости, частотной настройки, разносторонности и разночастотности. В заключении обсуждаются полученные результаты.

Уравнения динамики колебаний резонатора

При работе ВТГ в режиме ДУС используются вынужденные колебания. Электроды возбуждается первичная волна. Из-за вращения основания гироскопа возникает вторичная волна, пучности которой располагаются под углом $\pi/4$ к пучностям первичной возбуждающей волны. Измеряемая угловая скорость пропорциональна отношению амплитуд колебаний вторичной и первичной волн [5]. В дальнейшем будем рассматривать систему дифференциальных уравнений, описывающую линейные колебания неидеального упругого резонатора ВТГ в одномодовом приближении и имеющую вид [31, 32]:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + \omega^2 f &= -(\gamma + b_c)\dot{f} - (v + b_s)\dot{g} - h_c^* f - h_s^* g - u_1^* \sin \omega_0 t + u_2^* \cos \omega_0 t, \\ \ddot{g} + \omega^2 g &= -(\gamma - b_c)\dot{g} - (v + b_s)\dot{f} + h_c^* g - h_s^* f - u_3^* \sin \omega_0 t + u_4^* \cos \omega_0 t, \end{aligned} \quad (1)$$

где f и g – обобщенные координаты основной формы колебаний резонатора в двух отстоящих друг от друга под углом $\pi/4$ фиксированных точках, нормализованные относительно рабочего зазора емкостного датчика управления; ω – характерная частота собственных колебаний резонатора; $h_s^* = h_m \sin 4\alpha$, $h_c^* = h_m \sin 4\alpha$ и $b_s = b_m \sin 4\beta$, $b_c = b_m \cos 4\beta$; h_m , b_m – коэффициенты, характеризующие разночастотность и анизотропию демпфирования соответственно; α – угол ориентации главной оси жесткости относительно осей отсчета; β – угол ориентации главной оси диссипации относительно осей отсчета; $\gamma = \omega/Q$ – коэффициент демпфирования, Q – коэффициент добротности; $v = 4K_B \Omega$ – параметр, характеризующий угловую скорость Ω ; K_B – масштабный коэффициент Брайана; u_1^* , u_2^* , u_3^* , u_4^* – нормализованные амплитуды сигналов возбуждения колебаний резонатора; точкой обозначено дифференцирование по времени t ; ω_0 – частота внешнего гармонического возбуждения основной моды колебаний резонатора.

Отметим, что уравнения, описывающие динамику полусферического, цилиндрического и кольцевого резонаторов [31–34], имеют одинаковый вид (1). Коэффициенты, входящие в уравнения (1), могут определяться по методикам идентификации параметров ВТГ, представленным в [35, 36].

Будем полагать, что частота внешнего воздействия близка к собственной частоте колебательного контура, т.е.

$$\omega_0 = \omega + \lambda, \quad \lambda \ll \omega,$$

где λ – поправка к частоте, которая вводится для настройки резонансного режима работы гироскопа на подвижном основании.

Решение системы (1) имеет колебательный характер с характерной резонансной частотой ω порядка 10 кГц. При отсутствии возмущений в правой части (1) решение системы будет чисто гармоническим. Малые возмущения вызваны инструментальными

погрешностями изготовления резонатора, неравномерным демпфированием колебаний, гироскопическими силами и нелинейностью, присущей гироскопам класса обобщенного маятника Фуко [5]. Малые позиционные и скоростные силы в правой части уравнений (1) приводят к незначительному изменению резонансной частоты на величину порядка 1 Гц, что позволяет применить асимптотические методы исследования задачи.

Систему (1) будем исследовать с помощью метода усреднения Крылова–Боголюбова [37]. С этой целью введем медленные переменные p_1, q_1, p_2, q_2 посредством следующих формул:

$$\begin{aligned} f &= p_1 \sin \omega_0 t + q_1 \cos \omega_0 t, \quad \dot{f} = p_1 \omega_0 \cos \omega_0 t - q_1 \omega_0 \sin \omega_0 t, \\ g &= p_2 \sin \omega_0 t + q_2 \cos \omega_0 t, \quad \dot{g} = p_2 \omega_0 \cos \omega_0 t - q_2 \omega_0 \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и проводя осреднение по времени [5, 32], запишем систему уравнений движения в медленных переменных p_1, q_1, p_2, q_2 :

$$\begin{aligned} 2\dot{q}_1 &= -\gamma q_1 - b_c q_1 - \nu q_2 - b_s q_2 + h_c p_1 + h_s p_2 - 2\lambda p_1 + u_1, \\ 2\dot{p}_1 &= -\gamma p_1 - b_c p_1 - \nu p_2 - b_s p_2 - h_c q_1 - h_s q_2 + 2\lambda q_1 + u_2, \\ 2\dot{q}_2 &= -\gamma q_2 + b_c q_2 + \nu q_1 - b_s q_1 - h_c p_2 + h_s p_1 - 2\lambda p_2 + u_3, \\ 2\dot{p}_2 &= -\gamma p_2 + b_c p_2 + \nu p_1 - b_s p_1 + h_c q_2 - h_s q_1 + 2\lambda q_2 + u_4, \end{aligned} \quad (3)$$

где $h_c = h_c^* / \omega$, $h_s = h_s^* / \omega$, $u_i = u_i^* / \omega$, ($i = 1, 2, 3, 4$); u_1, \dots, u_4 – управляющие сигналы системы (3), позволяющие стабилизировать амплитуды колебаний двух нормальных форм колебательного контура.

Отметим, что в электронном контуре гироскопа физически реализуется схема осреднения Крылова–Боголюбова: измеряемые индукционными датчиками высокочастотные функции времени f, g с помощью контуров обработки сигналов [32] представляются в виде (2). Таким образом, медленные переменные p_1, q_1, p_2, q_2 системы (3) измеряемы.

Динамика резонатора ВТГ при функционировании в режиме ДУС компенсационного типа

Рассмотрим функционирование гироскопа в режиме ДУС компенсационного типа. В этом случае задается первичная возбуждающая волна с установленным значением амплитуды колебаний. Из-за вращения основания возникает вторая волна, пучности которой располагаются под углом $\pi/4$ к пучностям первичной возбуждающей волны. Целью управления колебаниями резонатора является возбуждение и поддержание заданной амплитуды колебаний первичной возбуждающей волны и полная компенсация колебаний второй волны. Сигналы управления, необходимые для компенсации, позволяют определить угловую скорость основания гироскопа. Зададим программные значения \bar{A}, \bar{B} амплитуд колебаний двух нормальных форм $\bar{A} = \bar{q}_1, \bar{B} = 0$, при этом $\bar{q}_2 = \bar{p}_1 = \bar{p}_2 = 0$, где $\bar{q}_1, \bar{p}_1, \bar{q}_2, \bar{p}_2$ – известные значения медленных переменных.

Построим пропорциональный регулятор (П-регулятор). Представим управляющие сигналы u_1, \dots, u_4 в виде обратной связи по измерению медленных переменных p_1, q_1, p_2, q_2 :

$$u_1 = -K_{oc} (q_1 - \bar{q}_1), u_2 = -K_{oc} p_1, u_3 = -K_{oc} q_2, u_4 = -K_{oc} p_2, \quad (5)$$

где K_{oc} – коэффициент усиления в цепи обратной связи. В дальнейшем будем рассматривать гироскоп, работающий в резонансе $\lambda = 0$.

Уравнения замкнутой системы управления примут вид:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= (-K_{oc} + \gamma + b_c)q_1 + h_c p_1 + h_s p_2 - (v + b_s)q_2 + K_{oc} \bar{q}_1 / 2, \\ \dot{p}_1 &= -(K_{oc} + \gamma + b_c)p_1 - h_c q_1 - h_s q_2 - (v + b_s)p_2 / 2, \\ \dot{q}_2 &= -(K_{oc} + \gamma - b_c)q_2 - h_c p_2 + h_s p_1 + (v - b_s)q_1 / 2, \\ \dot{p}_2 &= -(K_{oc} + \gamma - b_c)p_2 + h_c q_2 - h_s q_1 + (v - b_s)p_1 / 2.\end{aligned}\tag{6}$$

При исследовании устойчивости замкнутой системы дифференциальных уравнений (6) учтем, что $h_c, h_s, b_c, b_s \ll K_{oc}$. Пренебрегая слагаемыми, содержащими параметры h_c, h_s, b_c, b_s , построим характеристическое уравнение

$$((s + \varepsilon K_{oc} + \varepsilon \gamma)^2 + \varepsilon^2 v^2) = 0$$

и найдем его корни: $s_{1,2} = -\varepsilon(K_{oc} + \gamma + iv)$, $s_{3,4} = -\varepsilon(K_{oc} + \gamma - iv)$.

Так как коэффициенты K_{oc} и демпфирования γ принимают только положительные значения, то действительные части корней характеристического уравнения отрицательны. Следовательно, решение системы уравнений асимптотически устойчиво.

Таким образом, решение замкнутой системы уравнений (6) можно представить в виде суммы асимптотически устойчивого, зависящего от начальных условий $q_1(0) = q_{10}, p_1(0) = p_{10}, q_2(0) = q_{20}, p_2(0) = p_{20}$ и частного решений:

$$\begin{aligned}q_1 &= e^{-(K_{oc} + \gamma)t/2} [q_{10} \cos(vt/2) + q_{20} \sin(vt/2)] + K_{oc} \bar{q}_1 (K_{oc} + \gamma) / (v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2), \\ p_1 &= e^{-(K_{oc} + \gamma)t/2} [p_{10} \cos(vt/2) + p_{20} \sin(vt/2)], \\ q_2 &= e^{-(K_{oc} + \gamma)t/2} [q_{20} \cos(vt/2) - q_{10} \sin(vt/2)] - K_{oc} \bar{q}_1 v / (v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2), \\ p_2 &= e^{-(K_{oc} + \gamma)t/2} [p_{20} \cos(vt/2) - p_{10} \sin(vt/2)].\end{aligned}$$

Анализ этих выражений для установившегося режима

$$\begin{aligned}q_1 &= K_{oc} \bar{q}_1 (K_{oc} + \gamma) / (v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2), \quad q_2 = -K_{oc} \bar{q}_1 v / (v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2), \\ p_1 &= 0, \quad p_2 = 0,\end{aligned}\tag{7}$$

показывает, что имеется статическая погрешность регулирования, вызванная наличием угловой скорости основания. Значения установившихся амплитуд колебаний q_1, q_2 отличаются от программных значений \bar{q}_1, \bar{q}_2 на величину, зависящую от коэффициента усиления K_{oc} , угловой скорости основания v и коэффициента демпфирования γ .

Отметим, что отношение установившихся значений (6) пропорционально угловой скорости основания:

$$\frac{q_2}{q_1} = -\frac{v}{K_{oc} + \gamma}.\tag{8}$$

Таким образом, угловая скорость основания v может быть вычислена по измерениям установившихся значений:

$$v = -(K_{oc} + \gamma) \frac{q_2}{q_1}.\tag{9}$$

Точность определения угловой скорости основания зависит от уровня случайных и систематических погрешностей в измерениях медленных переменных. Приведенные выше формулы для расчета компенсационного режима подтверждаются результатами моделирования (рис. 1 и 2), которое проводилось при близких к существующим кон-

структивных параметрах гироскопа [21, 22] с кольцевым резонатором, радиус которого $R = 3$ мм. Пусть гироскоп находится на подвижном основании, вращающемся с постоянной угловой скоростью $\Omega = 300^\circ/\text{с}$ ($v = 8,38 \text{ с}^{-1}$). Зададим следующие числовые значения параметров системы: $K_1 = 500 \text{ с}^{-1}$, $\bar{q}_1 = 1$, $\bar{p}_1 = 0$, $q_{10} = 0$, $p_{10} = 1$, $q_{20} = 0,6$, $p_{20} = 0,3$.

Время выхода на режим установившихся колебаний составляет примерно 0,02 с (рис. 1 и 2). Значения q_1, q_2 в этом режиме не совпадают с заданными значениями медленных переменных, т.е. имеется упомянутая ранее статическая погрешность регулирования, вызванная наличием угловой скорости основания. Из рис. 3, на котором представлена зависимость угловой скорости основания от времени, рассчитанной по формуле (9), видно, что время функциональной готовности прибора существенно сокращается.

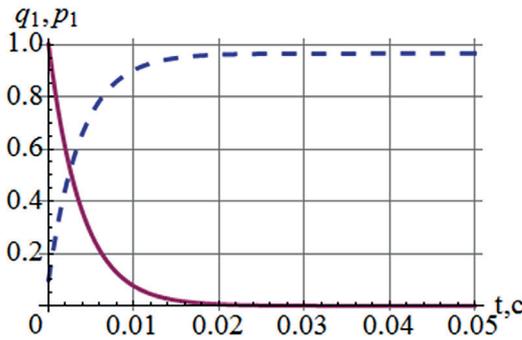


Рис. 1. Зависимость медленных переменных q_1, p_1 от времени t (переменная p_1 обозначена сплошной линией, q_1 – пунктирной)

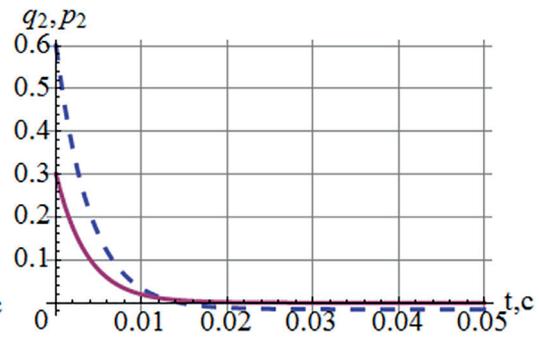


Рис. 2. Зависимость медленных переменных q_2, p_2 от времени t (переменная p_2 обозначена сплошной линией, q_2 – пунктирной)

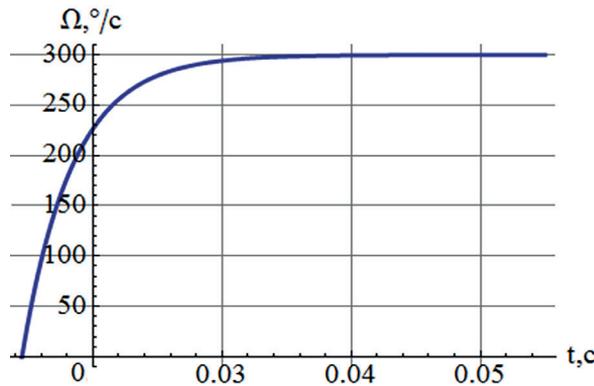


Рис. 3. Зависимость расчетной скорости от времени

Реализация компенсационного режима измерения позволяет существенно сократить время функциональной готовности прибора и расширить рабочую полосу частот гироскопа [19, 29].

Масштабный коэффициент ВТГ в режиме датчика угловой скорости

Рассмотрим функционирование гироскопа в режиме ДУС компенсационного типа. Угловая скорость определяется по установившемуся решению, которое получаем из (6) при $\dot{q}_1 = \dot{p}_1 = \dot{q}_2 = \dot{p}_2 = 0$, т.е. из системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 &-(K_{oc} + \gamma + b_c)q_1 - b_s q_2 + h_c p_1 + h_s p_2 + v q_2 - 2\lambda p_1 + K_{oc} \bar{q}_1 = 0, \\
 &-(K_{oc} + \gamma + b_c)p_1 - b_s p_2 - h_c q_1 + h_s q_2 + v q_2 + 2\lambda q_1 = 0, \\
 &-(K_{oc} + \gamma - b_c)q_2 - b_s q_1 - h_c p_2 + h_s p_1 - v q_1 - 2\lambda p_2 = 0, \\
 &-(K_{oc} + \gamma - b_c)p_2 - b_s p_1 + h_c q_2 - h_s q_1 - v q_2 + 2\lambda q_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что решение системы (10) в частном случае при $b_c = b_s = h_c = h_s = \lambda = 0$ совпадает с (7).

Подставляя q_1 из (7) и $q_2 = -u_3/K_{oc}$ в (9) и учитывая, что $u_3 = \eta U_3$, где η – параметр, характеризующий датчики управления [31–34], U_3 – напряжение управления, а угловая скорость равна $\Omega = v/(4K_b)$, получим формулы для ее вычисления, а также для расчета масштабного коэффициента гироскопа K_r :

$$\Omega = K_r U_3, \quad K_r = \frac{(v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2)\eta}{4K_b K_{oc}^2 \bar{q}_1}. \tag{11}$$

Таким образом, масштабный коэффициент гироскопа в режиме датчика угловой скорости зависит от коэффициента обратной связи, угловой скорости, заданного значения амплитуды колебаний, коэффициента демпфирования и других параметров.

Влияние коэффициента обратной связи

Рассмотрим влияние коэффициента обратной связи K_{oc} на масштабный коэффициент.

Относительная погрешность определения масштабного коэффициента, вызванная изменением коэффициента обратной связи ΔK_{oc} , будет равна

$$\delta K_r = \left| \frac{\partial K_r}{\partial K_{oc}} \cdot \frac{\Delta K_{oc}}{K_r} \right| = \left| \frac{\partial K_r}{\partial K_{oc}} \cdot \frac{K_{oc}}{K_r} \right| \delta K_{oc}. \tag{12}$$

Подставляя (11) в (12), получим

$$\delta K_r = \frac{2(v^2 + \gamma(K_{oc} + \gamma))}{(v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2)} K_{oc} \delta K_{oc}.$$

Влияние добротности резонатора на масштабный коэффициент

Рассмотрим влияние добротности резонатора $Q = \omega/\gamma$ на масштабный коэффициент.

Относительная погрешность определения масштабного коэффициента, вызванная изменением коэффициента добротности $\Delta Q = Q \delta Q$, составляет

$$\delta K_r = \frac{2\gamma(K_{oc} + \gamma)}{v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2} \delta Q. \tag{13}$$

Если пренебречь нормализованной скоростью v , так как $v \ll K_{oc}$, то формула (13) принимает вид

$$\delta K_r = \frac{2\gamma}{K_{oc} + \gamma} \delta Q.$$

Числовой пример. Для гироскопа с кольцевым резонатором [21, 22] частота собственных колебаний $\omega = 87964 \text{ с}^{-1}$ (14000 Гц). При добротности $Q = 5 \cdot 10^3$ получаем

коэффициент демпфирования $\gamma = \omega / Q = 17,6 \text{ с}^{-1}$. Масштабный коэффициент Брайана для кольца $K_B = 0,4$. При коэффициенте обратной связи $K_{oc} = 500 \text{ с}^{-1}$ и при изменении добротности на 1% относительная погрешность определения масштабного коэффициента, рассчитанная по формуле (16), составляет 0,0034, т.е. 0,34%.

Влияние диапазона измеряемой скорости на масштабный коэффициент

Рассмотрим влияние угловой скорости на масштабный коэффициент. При малых скоростях $v \ll 1$ и $v = 0$ масштабный коэффициент практически не зависит от скорости и составляет

$$K_{r0} = \frac{(K_{oc} + \gamma)^2 \eta}{4K_B K_{oc}^2 \bar{q}_1},$$

а при максимально допустимой скорости $v = v_1$ принимает следующее значение:

$$K_{r1} = \frac{(v_1^2 + (K_{oc} + \gamma)^2) \eta}{4K_B K_{oc}^2 \bar{q}_1}.$$

Относительная погрешность его определения равна $\delta K_{r0} = \frac{K_{r1} - K_{r0}}{K_{r1}} = \frac{v_1^2}{v_1^2 + (K_{oc} + \gamma)^2}$.

Числовой пример. Для гироскопа с кольцевым резонатором рассмотренного выше и максимально допустимой скорости $\Omega = 300^\circ/\text{с}$ ($v_1 = 8,38 \text{ с}^{-1}$) относительная погрешность будет равна $2,56 \cdot 10^{-4}$, или 0,0256%.

Влияние частотной настройки на масштабный коэффициент

Решая систему линейных уравнений (10) при $b_s = b_c = h_s = h_c = 0$, получим:

$$\begin{aligned} q_1 &= K_{oc} \bar{q}_1 (K_{oc} + \gamma) / (v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2 - 4\lambda^2), \\ q_2 &= -K_{oc} \bar{q}_1 v / (v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2 + 4\lambda^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) следует, что

$$v = -\frac{(K_{oc} + \gamma)(v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2 + 4\lambda^2)q_2}{(v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2 - 4\lambda^2)q_1}. \quad (15)$$

Подставляя $q_2 = -\eta U_3 / K_{oc}$ и q_1 из (14) в (15) и учитывая, что угловая скорость равна $\Omega = v / (4K_B)$, получим

$$\Omega = K_r U_3, \quad K_r = \frac{(v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2 + 4\lambda^2) \eta}{4K_B K_{oc}^2 \bar{q}_1}.$$

Рассмотрим влияние частотной настройки на масштабный коэффициент гироскопа на неподвижном основании ($v = 0$). При частоте внешнего воздействия, равной собственной частоте колебательного контура ($\lambda = 0$), масштабный коэффициент равен

$$K_{r0} = \frac{(K_{oc} + \gamma)^2 \eta}{4K_B K_{oc}^2 \bar{q}_1},$$

а при частотной настройке, отличной от нуля ($\lambda = \lambda_1$), масштабный коэффициент гироскопа на неподвижном основании принимает следующее значение:

$$K_{r1} = \frac{((K_{oc} + \gamma)^2 + 4\lambda_1^2)\eta}{4K_B K_{oc}^2 \bar{q}_1}.$$

Относительная погрешность его определения составит

$$\delta K_{r0} = \frac{K_{r1} - K_{r0}}{K_{r1}} = \frac{4\lambda_1^2}{(K_{oc} + \gamma)^2 + 4\lambda_1^2}.$$

Числовой пример. Для гироскопа с кольцевым резонатором при частотной настройке $\lambda_1 = 6,28 \text{ с}^{-1}$ (1 Гц) относительная погрешность будет равна $6,31 \cdot 10^{-4}$, или 0,0631%.

Влияние разнородности на масштабный коэффициент и нулевой сигнал

Решая систему линейных уравнений (10) при $h_s = h_c = \lambda = 0$, получим:

$$\begin{aligned} q_1 &= K_{oc} \bar{q}_1 (K_{oc} + \gamma - b_c) / (v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2 - b_c^2 - b_s^2), \\ q_2 &= -K_{oc} \bar{q}_1 (v + b_s) / (v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2 - b_c^2 - b_s^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) следует, что

$$v + b_s = -(K_{oc} + \gamma - b_c) \frac{q_2}{q_1}. \quad (17)$$

Подставляя $q_2 = -\eta U_3 / K_{oc}$ и q_1 из (16) в (17) и учитывая, что угловая скорость упругого кольца равна $\Omega = 5v/8$, получим:

$$\Omega = K_r U_3 - b_s / (4K_B), \quad K_r = \frac{(v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2 - b_c^2 - b_s^2)\eta}{4K_B K_{oc}^2 \bar{q}_1}. \quad (18)$$

Из первой формулы (18) следует, что выходной сигнал U_3 гироскопа при отсутствии входного воздействия $\Omega = 0$ равен $U_3 = b_s / (4K_B K_r)$ и является систематической составляющей дрейфа, что учитывают с помощью калибровки прибора. Этот сигнал прямо пропорционален разнородности резонатора b_s , однако его стабильность (а следовательно, и точность его компенсации) зависит от стабильности b_s . Ввиду этого ВТГ с резонаторами из кварцевого стекла всегда будут иметь значительно лучшие характеристики, чем приборы с металлическими резонаторами, по причине гораздо более высокой добротности и структурной стабильности материала [38].

Относительная погрешность определения масштабного коэффициента, вызванная изменением разнородности b_c, b_s , будет равна

$$\delta K_r = \frac{2(b_c^2 \delta b_c + b_s^2 \delta b_s)}{v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2 - b_c^2 - b_s^2}. \quad (19)$$

Влияние разночастотности на масштабный коэффициент

Решая систему линейных уравнений (10) при $b_s = b_c = \lambda = 0$, получим:

$$\begin{aligned} q_1 &= K_{oc} \bar{q}_1 (K_{oc} + \gamma) / (h_c^2 + h_s^2 + v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2), \\ q_2 &= -K_{oc} \bar{q}_1 v / (h_c^2 + h_s^2 + v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Из отношения установившихся значений q_1, q_2 (20) с учетом того, что $q_2 = -\eta U_3 / K_{fb}$ и угловая скорость $\Omega = v / (4K_B)$, получим:

$$\Omega = K_r U_3, \quad K_r = \frac{(v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2 + h_c^2 + h_s^2)\eta}{4K_B K_{oc}^2 \bar{q}_1}. \quad (21)$$

Относительная погрешность определения масштабного коэффициента, вызванная изменением разночастотности h_c, h_s , будет равна

$$\delta K_r = \frac{2(h_c^2 \delta h_c + h_s^2 \delta h_s)}{v^2 + (K_{oc} + \gamma)^2 + h_c^2 + h_s^2}. \quad (22)$$

Числовой пример. Для гироскопа с кольцевым резонатором, рассмотренного выше при составляющих разночастотности $h_c = h_s = 0,314 \text{ с}^{-1}$ (0,05 Гц) и изменении их на 5%, относительная погрешность определения масштабного коэффициента, рассчитанная по формуле (22), составляет $2,5 \cdot 10^{-8}$.

Таким образом, получены формулы, позволяющие анализировать влияние различных параметров гироскопа на его масштабный коэффициент.

Следует отметить, что использование интегрального звена устраняет статическую погрешность регулирования и повышает стабильность масштабного коэффициента. Тем не менее добавление в обратную связь интегрального звена увеличивает время переходного процесса с десятой доли секунды до нескольких секунд. Это значительно ухудшает характеристики приборов, установленных на высокоманевренных объектах, испытывающих вибрационные и ударные воздействия.

Заключение

Получены формулы для масштабного коэффициента ВТГ, функционирующего в режиме ДУС. Показано, что величина измеряемой скорости и масштабный коэффициент гироскопа в компенсационном режиме ДУС зависят от коэффициента обратной связи, добротности, диапазона измеряемых скоростей, частотной настройки, разночастотности и разноточности, типа датчика управления. Приведены формулы для расчета относительной погрешности определения масштабного коэффициента, которые могут быть использованы для оценки влияния на масштабный коэффициент ВТГ добротности, диапазона измеряемых скоростей, частотной настройки, коэффициента обратной связи, разночастотности и разноточности резонаторов.

Работа проводилась при поддержке гранта РНФ 23-21-00546.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пешехонов В.Г. Высоточная навигация без использования информации глобальных навигационных спутниковых систем // Гироскопия и навигация. 2022. Т. 30. №1 (116). С. 3–11. DOI 10.17285/0869-7035.0084.
2. Переляев С.Е. Современное состояние волновых твердотельных гироскопов. Перспективы развития в прикладной гироскопии // XXX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб., 2023. С. 204–207.
3. Маслов А.А., Маслов Д.А., Ниналаев И.Г., Меркурьев И.В. Волновые твердотельные гироскопы: обзор публикаций // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31. №1 (120). С. 3–25. EDN: BJLSLM. DOI: 10.1134/S2075108723010054.
4. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
5. Климов Д.М., Журавлев В.Ф., Жбанов Ю.К. Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во «Ким Л.А.», 2017. 194 с.

6. **Loper, E., Lynch, D.D.**, The HRG: a new low-noise Inertial Rotation Sensor, *Proc. 16th Joint Services-Data Exchange for Inertial Systems*, Los Angeles, USA, 16–18 Nov. 1982, pp. 432–433.
7. **Rozelle, D.M.**, The hemispherical resonator gyro: From wineglass to the planets, *Proc. 19th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, 2009, 134, pp. 1157–1178.
8. **Foloppe, Y., Lenoir, Y.**, HRG Crystal™ DUAL CORE: Rebooting the INS Revolution, *DGON Inertial Sensors and Systems (ISS)*, 2019, pp. 1–24, doi: 10.1109/ISS46986.2019.8943660.
9. **Мейер Д., Розелле Д.** Инерциальная навигационная система на основе миниатюрного волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. 2012. №3. С. 45–54.
10. **Жанруа А., Буве А., Ремиллье Ж.** Волновой твердотельный гироскоп и его применение в морском приборостроении // Гироскопия и навигация. 2013. №4. С. 24–34.
11. **Chikovani, V.V., Yatsenko, Yu. A., Kovalenko, V.A., Scherban, V.I.**, Digitally controlled High Accuracy Metallic Resonator CVG, *Proc. Symposium Gyro Technology*, Stuttgart, 2006, pp. 4.0–4.7.
12. **Wu, X. et al.**, *Cylindrical Vibratory Gyroscope*, Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2021, 202 p., <https://doi.org/10.1007/978-981-16-2726-2>.
13. **Tao, Y., Pan, Y., Liu, J., Jia, Y., Yang, K., Luo, H.**, A Novel Method for Estimating and Balancing the Second Harmonic Error of Cylindrical Fused Silica Resonators, *Micromachines (Basel)*, 2021, Apr. 1;12(4):380, doi: 10.3390/mi12040380.
14. **Ranji, A.R., Damodaran, V., Li, K., Chen, Z., Alirezaee, S., Ahamed, M.J.**, Recent Advances in MEMS-Based 3D Hemispherical Resonator Gyroscope (HRG)-A Sensor of Choice, *Micromachines (Basel)*, 2022, Oct. 5; 13(10):1676, doi: 10.3390/mi13101676.
15. **Asadian, M.H., Wang, D., Shkel, A.M.**, Fused quartz dual-shell resonator gyroscope, *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2022, 31, 533–54.
16. **Li, C., Wang, Y., Ahn, C.K., Zhang, C., Wang, B.**, Milli-Hertz Frequency Tuning Architecture Towards High Repeatable Micromachined Axi-Symmetry Gyroscopes, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 1–10, <https://doi.org/10.1109/TIE.2022.3192672>.
17. **Sun, J., Yu, S., Xi, X., Lu, K., Shi, Y., Wu, X., Xiao, D., Zhang, Y.**, Investigation of Angle Drift Induced by Actuation Electrode Errors for Whole-Angle Micro-Shell Resonator Gyroscope, *IEEE Sens. J.*, 2022, 22, 3105–3112.
18. **Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А., Чуманкин Е.А.** Балансировка металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов низкой и средней точности // Наука и образование. 2013. №6. С. 251–266.
19. **Распопов В.Я., Лихошерст В.В.** Волновые твердотельные гироскопы с металлическим резонатором // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31. №1 (120). С. 25–44. EDN: BQEDWV.
20. **Распопов В.Я., Алалуев Р.В., Ладонкин А.В., Лихошерст С.И., Шенилов В.В.** Настройка и калибровка волнового твердотельного гироскопа с металлическим резонатором, работающего в режиме датчика угловой скорости // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28. №1. С. 31–41.
21. **Тимошенко С.П., Анчутин С.А., Плеханов В.Е., Кочурин Е.С., Тимошенко А.С., Зуев Е.В.** Разработка математического описания кольцевого микрогироскопа // Нано- и микросистемная техника. 2014. Т. 5. С. 18–25.
22. **Косторной А.Н.** Кольцевой микромеханический гироскоп: дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2018. 130 с.
23. **Журавлев В.Ф., Переляев С.Е.** Волновой твердотельный гироскоп – инерциальный датчик нового поколения с комбинированным режимом функционирования // Инновационные, информационные и коммуникационные технологии. 2016. №1. С. 425–431.
24. **Шишаков К.В.** Твердотельные волновые гироскопы: волновые процессы, управление, системная интеграция. Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2018. 264 с.
25. **Трутнев Г.А.** Нелинейность масштабного коэффициента волнового твердотельного гироскопа // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 16. № 4. С. 138–143. DOI:10.22213/2410-9304-2018-4-138-144. EDN: YSUFJZ.
26. **Некрасов А.В.** Нейросетевой алгоритм калибровки волнового твердотельного гироскопа: дис. ... канд. техн. наук. Москва: НИУ «МАИ», 2010. 153 с.
27. **Джашигов В.Э., Панкратов В.М.** Математические модели термоупругого напряженно-деформированного состояния температурных и технологических погрешностей волнового твердотельного датчика инерциальной информации // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 3. С. 55–63.
28. **Северов Л.А., Пономарев В.К., Панферов А.И., Овчинникова Н.А.** Структура и характеристики волнового микромеханического датчика угловой скорости с кольцевым резонатором // Гироскопия и навигация. 2014. №3. С. 59–72.

29. Северов Л.А., Пономарев В.К., Панферов А.И., Овчинникова Н.А. Основные характеристики и балансировка микромеханических датчиков угловой скорости на основе кольцевого резонатора // Известия ТулГУ. Технические науки. 2016. №10. С. 41–52.
30. Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Масштабный коэффициент волнового твердотельного гироскопа в режиме датчика угловой скорости // XXIX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 2022. С. 176–179.
31. Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Компенсация погрешностей и учет нелинейности колебаний вибрационного кольцевого микрогироскопа в режиме датчика угловой скорости // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. №2. С. 227–241. DOI: 10.20537/nd1702006.
32. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 228 с.
33. Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Нелинейные эффекты в динамике волнового твердотельного гироскопа с плоскими электродами // Гироскопия и навигация. Т. 31. №4 (123). 2023. С. 64–77. EDN BPZTEA.
34. Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2021. №6. С. 88–110. DOI: 10.3103/S002565442106011X.
35. Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Способ определения параметров волнового твердотельного гироскопа. Патент 2544308(РФ). 2015. Бюл. №14.
36. Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Учет нелинейности колебаний резонаторов при идентификации параметров волновых твердотельных гироскопов разных типов // Изв. РАН. МТТ. 2022. №6. С. 28–40. DOI: 10.3103/S0025654422060073.
37. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974. 503 с.
38. Лукин Б.С., Матвеев В.А., Басараб М.А. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. М.: Радиотехника, 2014. 176 с.

Maslov, A.A., Maslov, D.A., and Merkuriev, I.V. (Moscow Power Engineering Institute) Operating in the Mode of a Compensation-type Angular Rate Sensor, *Гироскопия и Навигация*, 2024, vol. 32, no. 4 (127), pp. 3–14.

Abstract. The paper considers the dynamics of the wave solid-state gyroscope (WSG) operating in the mode of a compensation-type angular rate sensor (ARS). The mathematical model of the resonator forced oscillations is applied. The Krylov-Bogolyubov averaging method is used to study the WSG dynamics in slow variables measured by the gyroscope electronic circuit. A formula is derived to determine the scale factor of an imperfect gyroscope resonator in the operation mode under discussion. It is shown that in this case, the value of the measured angular rate and the scale factor of the gyroscope depend on the feedback coefficient, the range of measured angular rates, anisotropy of the resonator's elastic and damping properties, and other parameters. Numerical simulation of the information readout process in the WSG operating mode has been carried out. Formulas for the scale factor relative errors caused by changes in the gyroscope parameters are obtained. Numerical examples are given.

Key words: solid-state gyroscope (WSG), angular rate sensor (ARS), scale factor.

Материал поступил 31.07.2024