

Н. Н. ВАСИЛЮК, Г. А. НЕФЕДОВ, Е. А. СИДОРОВА, Н. О. ШАГИМУРАТОВА

АСТРОНОМИЧЕСКАЯ КАЛИБРОВКА БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ АСТРОИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ. ЧАСТЬ 2: КАЛИБРОВКА ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ И АСТРОНОМИЧЕСКИХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ

Под астрономической калибровкой понимается определение постоянной ориентации цифровых камер относительно инерциального модуля с использованием наземных наблюдений звезд. В первой части работы (см. [1]) рассматривалась калибровка относительной ориентации всех камер, позволяющая объединить отдельные результаты их измерений в наблюдения одной «виртуальной» камеры. Вторая часть посвящена калибровке ориентации виртуальной камеры относительно инерциального измерительного модуля. Калибровка выполняется на простом стенде, который не позволяет точно ориентировать калибруемый прибор относительно звезд. В связи с этим калибруемые параметры оцениваются по приращениям ориентации прибора за промежутки времени между астрономическими измерениями. Получены выражения для расчета приращений ориентации из инерциальных и астрономических измерений и ковариационных матриц этих приращений. Показано, что не всякая калибровочная траектория приводит к однозначной оценке калибруемых параметров. Сформулировано необходимое условие для отбора нужных траекторий. Получено выражение, с помощью которого по астрономическим измерениям вычисляется ковариационная матрица погрешностей определения ориентации инерциального модуля. В этом выражении учитываются конфигурация звезд, наблюдаемых виртуальной камерой, погрешности ее калибровки, приведенные в первой части статьи, и погрешности калибровки ее ориентации относительно инерциального модуля, полученные в второй части. Экспериментально определена среднеквадратичная погрешность астрономической калибровки этой ориентации – около 6".

Ключевые слова: астродатчик, калибровка, бесплатформенная астроинерциальная навигационная система, приращение ориентации, модель погрешностей.

Введение

Настоящая работа является продолжением [1, 2], в ней используются введенные прежде понятия и определения. Задача астрономической калибровки формулируется для бесплатформенной астроинерциальной навигационной системы (АИНС), со-

Василюк Николай Николаевич. Кандидат физико-математических наук, заместитель главного конструктора, ООО «НПК Электрооптика» (Москва). ORCID 0000-0003-2317-8066.

Нефедов Григорий Андреевич. Начальник отдела, АО «Раменский приборостроительный завод» (Москва).

Сидорова Екатерина Алексеевна. Инженер-программист, АО «Раменский приборостроительный завод».

Шагимуратова Наталья Олеговна. Начальник сектора, АО «Раменский приборостроительный завод».

держашей астровизирующее устройство (АВУ) и бесплатформенный инерциальный измерительный модуль (ИИМ). Под астрономической калибровкой АИНС понимается калибровка ориентации АВУ относительно ИИМ с привлечением наземных астрономических наблюдений, выполняемых с помощью АВУ. АВУ состоит из нескольких цифровых камер с непересекающимися полями зрения, жестко соединенных в единую механическую конструкцию и синхронизированных между собой. Такая конструкция позволяет рассматривать это устройство как виртуальную камеру, с которой связана система координат VF (Virtual Frame).

В [1] решается первая часть задачи астрономической калибровки – калибровка относительной ориентации камер в составе АВУ и приведение их измерений к общей системе координат VF . Расчетные среднеквадратичные погрешности (СКП), полученные в результате этой калибровки, не превышают $2''$. В [2] описывается модель погрешностей астрономических измерений, выполняемых отдельными камерами из состава АВУ.

ИИМ измеряет проекции вектора угловой скорости и кажущегося ускорения АИНС на оси своей приборной системы координат MF (Measurements Frame). Предполагается, что ИИМ поставляется для установки в АИНС уже откалиброванным, с СКП калибровки перекосов осей чувствительности триады гироскопов, не превышающей $3''$ (относительно MF) [3].

В предлагаемой вниманию читателей работе рассматривается вторая часть задачи астрономической калибровки – калибровка ориентации АВУ относительно ИИМ, для чего астрономические измерения дополняются измерениями вектора угловой скорости АИНС. Калибровка выполняется на простом двухосном поворотном стенде, способном только поворачивать и удерживать АИНС в фиксированном положении. АИНС устанавливается на планшайбе стенда один раз, ее переустановка в процессе калибровки не требуется. Углы поворота АИНС вокруг осей стенда могут измеряться, но не используются. В таких условиях с приемлемой погрешностью определяется только ориентация АВУ относительно звезд. Ориентация ИИМ непосредственно не измеряется, но с помощью ИИМ можно измерить вектор угловой скорости ее изменения. Наземная астрономическая калибровка АИНС усложняется из-за наличия атмосферы, вносящей разнообразные погрешности в наблюдения звезд, которые необходимо учитывать при обработке астрономических измерений АВУ.

1. Постановка задачи

В работе принята следующая система векторно-матричных обозначений. Координаты некоторого вектора \vec{r} относительно системы координат X записываются в виде вектор-столбца и обозначаются как $\mathbf{r}_X = [r_{xX} \ r_{yX} \ r_{zX}]^T$:

$$\vec{r} = r_{xX} \vec{x}^X + r_{yX} \vec{y}^X + r_{zX} \vec{z}^X = [\vec{x}^X \ \vec{y}^X \ \vec{z}^X] \mathbf{r}_X,$$

где $\vec{x}^X, \vec{y}^X, \vec{z}^X$ – базисные векторы системы координат X . Ориентация системы координат $X1$ относительно системы координат $X2$ задается в виде матриц \mathbf{S}_{X2}^{X1} и $\mathbf{S}_{X1}^{X2} = (\mathbf{S}_{X2}^{X1})^{-1}$ преобразования координат вектора \vec{r} :

$$\mathbf{r}_{X2} = \mathbf{S}_{X2}^{X1} \mathbf{r}_{X1}, \quad \mathbf{r}_{X1} = \mathbf{S}_{X1}^{X2} \mathbf{r}_{X2},$$

где $\mathbf{r}_{X1}, \mathbf{r}_{X2}$ – координаты вектора \vec{r} относительно систем координат $X1, X2$:

$$\vec{r} = [\bar{x}^{X1} \bar{y}^{X1} \bar{z}^{X1}] \mathbf{r}_{X1} = [\bar{x}^{X2} \bar{y}^{X2} \bar{z}^{X2}] \mathbf{r}_{X2}.$$

Если системы координат $X1, X2$ – правые и ортонормированные, то $\mathbf{S}_{X1}^{X2} = (\mathbf{S}_{X2}^{X1})^T$.

В процессе калибровки АИНС цифровые камеры синхронно делают снимки звездного неба, объединяемые в один массив изображений. За время калибровки записывается N таких массивов. Момент времени начала экспозиции всех изображений в массиве с номером $n = 1 \dots N$ обозначается t_{En} . Одновременно с массивами изображений записываются инерциальные измерения, передаваемые ИИМ, которые выполняются асинхронно относительно моментов времени t_{En} . Набор, состоящий из N массивов синхронных изображений и записи инерциальных измерений, полученных относительно общей шкалы времени, называется набором калибровочных измерений.

Истинные значения калибруемых углов ориентации АБУ относительно ИИМ записываются в виде вектора $\vec{\beta} = [\check{\beta}_\psi \check{\beta}_\theta \check{\beta}_\gamma]^T$, компоненты которого представляют собой курс $\check{\beta}_\psi$, тангаж $\check{\beta}_\theta$ и крен $\check{\beta}_\gamma$ VF относительно MF . Истинное значение постоянной матрицы преобразования координат из VF в MF вычисляется из значений этих углов согласно формуле (1) [1]:

$$\check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF} = \mathbf{R}_\psi(\check{\beta}_\psi) \mathbf{R}_\theta(\check{\beta}_\theta) \mathbf{R}_\gamma(\check{\beta}_\gamma),$$

где $\mathbf{R}_\psi(\check{\beta}_\psi)$, $\mathbf{R}_\theta(\check{\beta}_\theta)$, $\mathbf{R}_\gamma(\check{\beta}_\gamma)$ – матрицы элементарных поворотов на углы курса, тангажа и крена. Матрица $\check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF}$ связывает истинную матрицу $\check{\mathbf{S}}_{GCRS}^{VF,n}$ ориентации VF в момент t_{En} и истинную матрицу $\check{\mathbf{S}}_{GCRS}^{MF,n}$ ориентации MF в момент t_{En} относительно инерциальной небесной геоцентрической системы координат $GCRS$ (Geocentric Celestial Reference System):

$$\check{\mathbf{S}}_{GCRS}^{VF,n} = \check{\mathbf{S}}_{GCRS}^{MF,n} \check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF}.$$

Для калибровки АИНС используется простой поворотный стенд, не позволяющий точно определить ориентацию MF по отношению к каким-либо внешним ориентирам. В таких условиях чисто инерциальными методами можно было бы вычислить ориентацию MF в локальной системе координат ENU (East–North–Up). Однако погрешность начальной выставки ориентации определяется погрешностью гироскопирования, которая составляет единицы угловых минут для серийных ИИМ навигационного класса [4, 5], что для калибровки АИНС неприемлемо.

Вместо ориентации MF относительно ENU в момент t_{En} можно использовать ее приращение на промежутке $[t_{En-1}, t_{En}]$, которое описывается матрицей преобразования координат из MF в момент t_{En} в MF в момент t_{En-1} . Истинное значение этой матрицы представим как

$$\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{imu} \equiv \Delta \check{\mathbf{S}}_{MF,n-1}^{MF,n} = (\check{\mathbf{S}}_{GCRS}^{MF,n-1})^T \check{\mathbf{S}}_{GCRS}^{MF,n}, n = 2 \dots N.$$

Экспериментальное значение $\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{imu}$ матрицы $\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{imu}$ вычисляется путем интегрирования измерений гироскопов ИИМ на промежутке $[t_{En-1}, t_{En}]$ с начальным условием в виде единичной матрицы 3×3 .

Результатом работы АБУ является измеренная матрица $\mathbf{S}_{GCRS}^{VF,n}$ ориентации VF относительно $GCRS$. Приращение ориентации VF на промежутке $[t_{En-1}, t_{En}]$ вычисляется из значений измеренных матриц $\mathbf{S}_{GCRS}^{VF,n-1}$ и $\mathbf{S}_{GCRS}^{VF,n}$ в граничные моменты времени:

$$\Delta \mathbf{S}_n^{avu} \equiv \Delta \mathbf{S}_{VF,n-1}^{VF,n} = (\mathbf{S}_{GCRS}^{VF,n-1})^T \mathbf{S}_{GCRS}^{VF,n}.$$

Истинное значение $\Delta\tilde{\mathbf{S}}_n^{avu}$ матрицы $\Delta\mathbf{S}_n^{avu}$ выражается через истинные матрицы ориентации VF относительно $GCRS$: $\Delta\tilde{\mathbf{S}}_n^{avu} = (\tilde{\mathbf{S}}_{GCRS}^{VF,n-1})^T \tilde{\mathbf{S}}_{GCRS}^{VF,n}$.

Задачей данной работы являются построение и проверка процедуры получения оценок $\mathbf{\beta}$ углов $\tilde{\mathbf{\beta}}$ из экспериментально полученных наборов матриц $\{\Delta\mathbf{S}_n^{avu}\}_{n=2}^N$ и $\{\Delta\mathbf{S}_n^{imu}\}_{n=2}^N$.

2. Расчет приращений ориентации ИИМ

2.1. Модель измерений ИИМ

Для калибровки ориентации АБУ относительно ИИМ используются только показания гироскопов. ИИМ устанавливается в АИНС после заводской калибровки, т.е. для гироскопов определены вектор смещений нулей, масштабные коэффициенты и матрица перекосов осей чувствительности. ИИМ выполняет измерения в дискретные моменты времени $t_{Ik} = t_{I0} + kT_{IMU}$, где t_{I0} – момент времени, принятый за начальный; T_{IMU} – постоянный период измерения ИИМ; $k \geq 0$ – порядковый номер измерения ИИМ от начального момента. Триада гироскопов ИИМ измеряет вектор ρ_k малого поворота MF на интервале $[t_{Ik-1}, t_{Ik}]$:

$$\rho_k \equiv [\rho_{xk} \ \rho_{yk} \ \rho_{zk}]^T = \tilde{\rho}_k + \delta\rho_k,$$

где $\tilde{\rho}_k = \int_{t_{Ik-1}}^{t_{Ik}} \tilde{\omega}(t) dt$, $\tilde{\omega}(t)$ – истинные векторы малого поворота и угловой скорости ИИМ; $\delta\rho_k$ – вектор погрешностей триады гироскопов:

$$\delta\rho_k \approx \mathbf{M}_G \tilde{\rho}_k + \delta\mathbf{b}_G + \mathbf{w}_{Gk}, \quad (1)$$

где $\delta\mathbf{b}_G = [\delta b_{xG} \ \delta b_{yG} \ \delta b_{zG}]^T$ – вектор погрешностей коррекции смещений нулей; $\mathbf{w}_{Gk} = [w_{xGk} \ w_{yGk} \ w_{zGk}]^T$ – вектор случайных погрешностей; \mathbf{M}_G – матрица погрешностей калибровки перекосов осей чувствительности и масштабных коэффициентов. Значения \mathbf{M}_G , $\delta\mathbf{b}_G$ в модели погрешностей считаются постоянными на протяжении всей процедуры калибровки АИНС.

Смещения нулей отдельных инерциальных датчиков и элементы матриц перекосов их осей чувствительности при калибровке записываются в виде единого вектора параметров [3]. Ковариационная матрица погрешностей определения элементов этого вектора вычисляется как промежуточный результат калибровки, который практически никогда не публикуется. Иногда приводятся расчетные СКП калибруемых параметров, получаемые из диагональных элементов этой матрицы. В связи с этим для практических расчетов, поскольку мы не располагаем сведениями о перекрестных ковариациях, ковариационные матрицы результатов калибровки ИИМ будем считать диагональными, а на диагоналях расставим квадраты известных СКП этих параметров.

В линейном приближении матрицу \mathbf{M}_G можно записать в виде [3]

$$\mathbf{M}_G = \begin{bmatrix} k_{xG} & \phi_{xyG} & \phi_{xzG} \\ \phi_{yxG} & k_{yG} & \phi_{yzG} \\ \phi_{zxG} & \phi_{zyG} & k_{zG} \end{bmatrix},$$

где ϕ_{ijG} – погрешность калибровки угла наклона оси $I = x, y, z$ чувствительности гироскопа ИИМ относительно оси $j = x, y, z$ MF ; k_{iG} – относительная погрешность кали-

бровки масштабного коэффициента по оси i . Значения φ_{ijG} и k_{iG} считаются статистически независимыми, нормально распределенными с нулевым средним и СКП $\sigma_{\varphi G}$ и σ_{kG} .

Вектор $\delta \mathbf{b}_G$ полагается нормально распределенным с нулевым средним и ковариационной матрицей $\mathbf{P}_{bG} = (\sigma_{bG} T_{IMU})^2 \mathbf{I}_3$, где σ_{bG} – СКП коррекции смещения нуля в измерениях каждого гироскопа в отдельности; \mathbf{I}_N – единичная матрица размером $N \times N$. Вектор \mathbf{w}_{Gk} описывается стационарным случайным процессом типа «белый шум в дискретном времени» с нулевым средним и ковариационной матрицей $\mathbf{P}_{wG} = (\sigma_{wG} \sqrt{T_{IMU}})^2 \mathbf{I}_3$, где σ_{wG} – угловые случайные блуждания в измерениях угловой скорости (квадратный корень из двусторонней спектральной плотности мощности аддитивного широкополосного шума).

Для расчета ковариационной матрицы вектора погрешностей гироскопов подставим выражение $\check{\mathbf{p}}_k = \mathbf{p}_k - \delta \mathbf{p}_k$ в (1) и отбросим слагаемые с порядком малости выше первого. В этом приближении получим новое выражение для вектора погрешностей, в которое входят величины либо измеряемые непосредственно, либо с заранее заданными вероятностными параметрами:

$$\delta \mathbf{p}_k \approx \mathbf{M}_G \mathbf{p}_k + \delta \mathbf{b}_G + \mathbf{w}_{Gk}.$$

Из этого выражения получается формула для практического вычисления ковариационной матрицы вектора погрешностей $\delta \mathbf{p}_k$:

$$\mathbf{P}_{p_k} = \sigma_{\varphi G}^2 \text{diag} \{ \rho_{yk}^2 + \rho_{zk}^2, \rho_{xk}^2 + \rho_{zk}^2, \rho_{xk}^2 + \rho_{yk}^2 \} + \sigma_{kG}^2 \text{diag} \{ \rho_{xk}^2, \rho_{yk}^2, \rho_{zk}^2 \} + \mathbf{P}_{bG} + \mathbf{P}_{wG},$$

где $\text{diag} \{ a, b, c, \dots \}$ – оператор построения диагональной матрицы с элементами a, b, c, \dots на главной диагонали.

2.2. Интегрирование измерений гироскопов

Инерциальные измерения в моменты t_{Ik} возникают асинхронно относительно моментов t_{En} получения астрономических измерений. Матрица $\Delta \mathbf{S}_n^{imu}$ из асинхронных измерений гироскопов рассчитывается по методике [6], в соответствии с которой приращение ориентации задается промежуточным кватернионом $\mathbf{q}_n = [q_{0n} \ q_{1n} \ q_{2n} \ q_{3n}]^T$, его интегрирование начинается в момент t_{j0} , непосредственно предшествующий t_{En-1} : $t_{j0} \leq t_{En-1} < t_{j1}$. В записи кватернионов компонента с номером 0 соответствует скалярной части, а компоненты с номерами 1–3 – векторной.

Количество K последовательных измерений ИИМ, участвующих в интегрировании, выбирается из условия $t_{IK-2} \leq t_{En} < t_{IK-1}$. При этом момент t_{IK-1} получения измерения ИИМ с номером $K-1$ непосредственно следует за моментом t_{En} . Т.е. промежуток $[t_{j0}, t_{IK-1}]$, на котором выполняется интегрирование инерциальных измерений, содержит внутри себя отрезок времени $[t_{En-1}, t_{En}]$ между последовательными астрономическими измерениями. Внутри каждого промежутка $[t_{Ik-1}, t_{Ik}]$, $k = 1 \dots K-1$, приращение ориентации MF вычисляется в виде ненормированного кватерниона $\mathbf{r}_k(\tau) = [r_{0k}(\tau) \ r_{1k}(\tau) \ r_{2k}(\tau) \ r_{3k}(\tau)]^T$ [7]:

$$r_{0k}(\tau) = 1 - \frac{\mathbf{p}_k^2}{8} \frac{\tau^2}{T_{IMU}^2} - \frac{\mathbf{p}_k \cdot \Delta \mathbf{p}_k}{4} \left(\frac{\tau^3}{T_{IMU}^3} - \frac{\tau^2}{T_{IMU}^2} \right),$$

$$\begin{bmatrix} r_{1k}(\tau) \\ r_{2k}(\tau) \\ r_{3k}(\tau) \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{p}_k}{2} \left(\frac{\tau}{T_{IMU}} - \frac{\mathbf{p}_k^2}{24} \frac{\tau^3}{T_{IMU}^3} \right) + \frac{\Delta \mathbf{p}_k}{4} \left(\frac{\tau^2}{T_{IMU}^2} - \frac{\tau}{T_{IMU}} \right) + \frac{\mathbf{p}_k \times \Delta \mathbf{p}_k}{24} \frac{\tau^3}{T_{IMU}^3},$$

где $\tau = t - t_{lk-1} \in [0, T_{IMU}]$, $\Delta \rho_k = \rho_k - \rho_{k-1}$. Ненормированный кватернион $\mathbf{r}_k = [r_{0k} \ r_{1k} \ r_{2k} \ r_{3k}]^T \equiv r_k(T_{IMU})$ за полный промежуток времени $[t_{lk-1}, t_{lk}]$ между измерениями ИИМ представим в виде

$$r_{0k} = 1 - \frac{\rho_k^2}{8} \frac{\tau^2}{T_{IMU}^2}, [r_{1k} \ r_{2k} \ r_{3k}]^T = \frac{\rho_k}{2} \left(1 - \frac{\rho_k^2}{24} \right) + \frac{\rho_k \times \Delta \rho_k}{24}.$$

Начальное значение $\mathbf{q}_{0n} = \mathbf{q}_n(t_{j0})$ для интегрирования кватерниона \mathbf{q}_n выбирается из условия $\mathbf{q}_n(t_{En-1}) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. При таком выборе кватернион $\mathbf{q}_{1n} = \mathbf{q}_n(t_{l1})$ в момент времени $t_{l1} > t_{En-1}$ рассчитывается следующим образом:

$$\mathbf{q}_{1n} = \frac{\mathbf{r}_1^*(t_{En-1} - t_{j0}) \circ \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1^*(t_{En-1} - t_{j0}) \circ \mathbf{r}_1\|},$$

где «*» – символ кватернионного сопряжения; $\mathbf{r}_1^*(t_{En-1} - t_{j0})$ – сопряженное значение кватерниона $\mathbf{r}_1(\tau)$ в момент $\tau = t_{En-1} - t_{j0}$. Кватернион $\mathbf{q}_{kn} = \mathbf{q}_n(t_{lk})$ приращения ориентации MF в момент t_{lk} , $k = 2 \dots K-1$ запишем как

$$\mathbf{q}_{kn} = \frac{\mathbf{q}_{k-1n} \circ \mathbf{r}_k}{\|\mathbf{q}_{k-1n} \circ \mathbf{r}_k\|}.$$

Искомое значение $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_n(t_{En})$ кватерниона приращения ориентации MF примет вид:

$$\mathbf{q}_n = \frac{\mathbf{q}_{K-2n} \circ \mathbf{r}_{K-1}(t_{En} - t_{lK-2})}{\|\mathbf{q}_{K-2n} \circ \mathbf{r}_{K-1}(t_{En} - t_{lK-2})\|}.$$

Из этого кватерниона вычисляется матрица $\Delta \mathbf{S}_n^{imu}$:

$$\Delta \mathbf{S}_n^{imu} = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_{2n}^2 + q_{3n}^2) & 2(q_{1n}q_{2n} - q_{0n}q_{3n}) & 2(q_{0n}q_{2n} + q_{1n}q_{3n}) \\ 2(q_{0n}q_{3n} + q_{1n}q_{2n}) & 1 - 2(q_{3n}^2 + q_{1n}^2) & 2(q_{3n}q_{2n} - q_{0n}q_{1n}) \\ 2(q_{1n}q_{3n} - q_{0n}q_{2n}) & 2(q_{0n}q_{1n} + q_{2n}q_{3n}) & 1 - 2(q_{1n}^2 + q_{2n}^2) \end{bmatrix}.$$

2.3. Погрешности расчета приращения ориентации ИИМ

Погрешности расчета матрицы $\Delta \mathbf{S}_n^{imu}$ описываются вектором малого поворота $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{imu} = [\varepsilon_{xn}^{imu} \ \varepsilon_{yn}^{imu} \ \varepsilon_{zn}^{imu}]^T$, для которого справедливо линейное приближение

$$\Delta \mathbf{S}_n^{imu} \approx \check{\Delta} \mathbf{S}_n^{imu} (\mathbf{I}_3 + [\boldsymbol{\varepsilon}_n^{imu} \times]),$$

где $[\boldsymbol{\varepsilon}_n^{imu} \times]$ – кососимметричная матрица, соответствующая левому множителю в координатной записи векторного произведения $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a} \times] \mathbf{b}$,

$$[\mathbf{a} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Если обозначить вектор угловой скорости, измеренный ИИМ, как $\boldsymbol{\omega}(t) = \check{\boldsymbol{\omega}}(t) + \delta \boldsymbol{\omega}(t)$, где $\delta \boldsymbol{\omega}(t)$ – погрешности ИИМ, то для вектора $\boldsymbol{\varepsilon}^{imu}(t)$ справедливо уравнение погрешностей [8] $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{imu}(t) = -\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\varepsilon}^{imu}(t) + \delta \boldsymbol{\omega}(t)$. Численное решение

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{imu}(t_{lk}) \approx (\mathbf{I}_3 - [\boldsymbol{\rho}_k \times]) \boldsymbol{\varepsilon}^{imu}(t_{lk-1}) + \delta \boldsymbol{\rho}_k$$

этого уравнения на периоде $[t_{k-1}, t_k]$ измерения ИИМ позволяет построить рекуррентную формулу для расчета ковариационной матрицы вектора $\epsilon^{imu}(t)$ в дискретные моменты времени $t_{k}, k = 0 \dots K - 1$, с точностью до линейного приближения:

$$\mathbf{E}^{imu}(t_k) \equiv \text{cov}\{\epsilon^{imu}(t_k)\} \approx (\mathbf{I}_3 - [\mathbf{p}_k \times]) \mathbf{E}^{imu}(t_{k-1}) (\mathbf{I}_3 + [\mathbf{p}_k \times]) + \mathbf{P}_{\rho k}. \quad (2)$$

Интегрирование измерений ИИМ для получения матрицы $\Delta \mathbf{S}_n^{imu}$ начинается в момент t_{j_0} с детерминированного начального условия, при котором $\mathbf{q}_n(t_{En-1}) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ и отсутствует случайная погрешность: $\epsilon^{imu}(t_{En-1}) = [0 \ 0 \ 0]^T$. Так как разность между моментами времени t_{En-1} и t_{j_0} меньше периода измерения ИИМ: $0 \leq t_{En-1} - t_{j_0} < T_{IMU}$, то без ущерба для точности расчета ковариационной матрицы положим $\epsilon^{imu}(t_{j_0}) = [0 \ 0 \ 0]^T$. Значит, начальное условие для решения уравнения (2) можно записать в виде $\mathbf{E}^{imu}(t_{j_0}) = \mathbf{O}_3$.

Ковариационная матрица \mathbf{E}_n^{imu} погрешности расчета приращения $\Delta \mathbf{S}_n^{imu}$ рассчитывается после получения измерения ИИМ с номером $K - 1$. Поскольку разность между моментами времени t_{En} и t_{k-1} не превосходит период измерения ИИМ: $0 < t_{k-1} - t_{En} \leq T_{IMU}$, без ущерба для точности полученной ковариационной матрицы запишем

$$\mathbf{E}_n^{imu} \equiv \mathbf{E}^{imu}(t_{En}) \approx \mathbf{E}^{imu}(t_{K-1}).$$

Для количественной оценки погрешности определения приращения ориентации ИИМ используется величина

$$\sigma_{en}^{imu} = \sqrt{\langle (\epsilon_{xn}^{imu})^2 \rangle + \langle (\epsilon_{yn}^{imu})^2 \rangle + \langle (\epsilon_{zn}^{imu})^2 \rangle} = \sqrt{(\sigma_{\epsilon 11n}^{imu})^2 + (\sigma_{\epsilon 22n}^{imu})^2 + (\sigma_{\epsilon 33n}^{imu})^2},$$

где $(\sigma_{\epsilon 11n}^{imu})^2, (\sigma_{\epsilon 22n}^{imu})^2, (\sigma_{\epsilon 33n}^{imu})^2$ – диагональные элементы матрицы \mathbf{E}_n^{imu} ; $\langle \dots \rangle$ – оператор математического ожидания.

3. Расчет приращений ориентации АВУ

3.1. Модель измерений АВУ

В [1] описана конструкция АВУ, собранного из одинаковых цифровых камер с порядковыми номерами $i = 1 \dots I$, где $I > 1$ – число камер. С каждой камерой связана ее собственная система координат CF^i (Camera Frame), в которой определяется местоположение изображений звезд. Система координат VF АВУ совпадает с системой координат CF^1 .

В момент времени t_{En} камера с номером i обнаруживает и распознает R_n^i звезд, для которых вычисляются два пучка единичных векторов – $\{\mathbf{s}_{CF^i n, r^i}^i\}_{r^i=1}^{R_n^i}$ и $\{\mathbf{g}_{GCRS n, r^i}^i\}_{r^i=1}^{R_n^i}$, задающих направления на звезды (далее – направляющих векторов звезд), причем векторы $\mathbf{s}_{CF^i n, r^i}^i$ и $\mathbf{g}_{GCRS n, r^i}^i$ задают направление на одну и ту же звезду r^i . Координаты векторов пучка $\{\mathbf{s}_{CF^i n, r^i}^i\}_{r^i=1}^{R_n^i}$ вычисляются в CF^i из изображений распознанных звезд, координаты векторов пучка $\{\mathbf{g}_{GCRS n, r^i}^i\}_{r^i=1}^{R_n^i}$ – из данных звездного каталога. В векторах пучка $\{\mathbf{g}_{GCRS n, r^i}^i\}_{r^i=1}^{R_n^i}$ скорректирована скоростная абберрация от орбитального движения Земли [9].

В результате калибровки [1] для каждой камеры $i = 1 \dots I$ определяются три угла $\boldsymbol{\alpha}^i = [\alpha_\psi^i \ \alpha_\theta^i \ \alpha_\gamma^i]^T$ ориентации CF^i относительно CF^1 и их ковариационная матрица \mathbf{P}_α^i размером 3×3 , причем $\boldsymbol{\alpha}^1 \equiv \mathbf{o}_3$, $\mathbf{P}_\alpha^1 \equiv \mathbf{O}_3$, где \mathbf{o}_M и \mathbf{O}_M – вектор и матрица размерами $M \times 1$ и $M \times M$, состоящие из нулей. Углы α^i позволяют рассчитать постоянные матрицы

$\mathbf{C}_{VF}^{CF^i} = \mathbf{R}_\psi(\alpha_\psi^i) \mathbf{R}_\vartheta(\alpha_\vartheta^i) \mathbf{R}_\gamma(\alpha_\gamma^i)$ преобразования координат из CF^i в VF , причем $\mathbf{C}_{VF}^{CF^1} \equiv \mathbf{I}_3$. Кроме углов $\{\alpha^i\}_{i=1}^I$, процедура калибровки [1] позволяет определить углы $\{\Psi_n^{avu}\}_{n=1}^N$ ориентации VF относительно ENU , где $\Psi_n^{avu} = [\Psi_n^{avu} \ \vartheta_n^{avu} \ \gamma_n^{avu}]^T$ – углы курса Ψ_n^{avu} , тангажа ϑ_n^{avu} и крена γ_n^{avu} АБУ в момент t_{En} .

3.2. Решение задачи Вахбы внутри атмосферы

Матрицы $\{\mathbf{C}_{VF}^{CF^i}\}_{i=1}^I$ позволяют преобразовать отдельные пучки $\{\mathbf{s}_{CF^i n,r^i}^i\}_{r^i=1}^{R_n^i}$ направляющих векторов в общий пучок $\{\mathbf{s}_{VF n,r}\}_{r=1}^{R_n^{tot}}$, заданный в VF :

$$\mathbf{s}_{VF n,r} = \mathbf{C}_{VF}^{CF^i} \mathbf{s}_{CF^i n,r^i}^i,$$

где $R_n^{tot} = \sum_{i=1}^I R_n^i$ – общее число звезд, обнаруженных и распознанных всеми камерами в момент времени n ; $r = r^i + \sum_{q=1}^{i-1} R_n^q$ – порядковый номер звезды r^i в общем пучке. Направляющие векторы $\{\mathbf{s}_{VF n,r}\}_{r=1}^{R_n^{tot}}$ измерены с поверхности Земли, поэтому их значения искажены различными видами рефракции.

В [1] рефракционные искажения вносились в направляющие векторы пучков $\{\mathbf{g}_{GCRS n,r^i}^i\}_{r^i=1}^{R_n^i}$, $I = 1 \dots I$, так как калибровка относительной ориентации камер выполнялась по измерениям направлений, полученным внутри атмосферы. В данной работе для калибровки ориентации АБУ относительно ИИМ используются приращения $\{\Delta \mathbf{S}_n^{imu}\}_{n=2}^N$, вычисленные относительно произвольной инерциальной системы координат (в данном случае $GCRS$), и рефракция корректируется в пучке $\{\mathbf{s}_{VF n,r}\}_{r=1}^{R_n^{tot}}$. В результате получается новый пучок векторов $\{\mathbf{s}_{VF n,r}^{rfc}\}_{r=1}^{R_n^{tot}}$, который могло бы наблюдать АБУ с поверхности Земли при отсутствии атмосферы [10]:

$$\mathbf{s}_{VF n,r}^{rfc} = n(H^{clb})(\mathbf{I}_3 - \mathbf{u}_{VF n} \mathbf{u}_{VF n}^T) \mathbf{s}_{VF n,r} + \mathbf{u}_{VF n} \sqrt{1 - n^2 (H^{clb})^2 (1 - (\mathbf{u}_{VF n}^T \mathbf{s}_{VF n,r})^2)},$$

где $n(H^{clb})$ – коэффициент преломления в плоскопараллельной модели стандартной атмосферы на высоте H^{clb} ; $\mathbf{u}_{VF n} = \mathbf{S}_{VF,n}^{ENU} [0 \ 0 \ 1]^T$ – направляющий вектор местной вертикали относительно VF ; $\mathbf{S}_{VF,n}^{ENU} = (\mathbf{R}_\psi(\Psi_n^{avu}) \mathbf{R}_\vartheta(\vartheta_n^{avu}) \mathbf{R}_\gamma(\gamma_n^{avu}))^T$ – матрица преобразования координат, рассчитанная из калиброванных углов Ψ_n^{avu} .

Матрица $\mathbf{S}_{GCRS}^{VF,n}$ получается из решения задачи Вахбы для откорректированного $\{\mathbf{s}_{VF n,r}^{rfc}\}_{r=1}^{R_n^{tot}}$ и каталожного $\{\mathbf{g}_{GCRS n,r^i}^i\}_{r^i=1}^{R_n^{tot}}$ пучков векторов. Отсюда приращение ориентации АБУ:

$$\Delta \mathbf{S}_n^{avu} = (\mathbf{S}_{GCRS}^{VF,n-1})^T \mathbf{S}_{GCRS}^{VF,n}.$$

3.3. Погрешности расчета приращения ориентации АБУ

В [1] получено выражение для вектора малого поворота, описывающего погрешность измерения ориентации АБУ относительно $GCRS$. Здесь значение этого вектора в момент t_{En} будет обозначаться как $\boldsymbol{\theta}_n^{avu}$:

$$\mathbf{S}_{GCRS}^{VF,n} \approx \tilde{\mathbf{S}}_{GCRS}^{VF,n} (\mathbf{I}_3 + [\boldsymbol{\theta}_n^{avu} \times]).$$

Там же [1] было получено достаточно громоздкое выражение (6) для ковариационной матрицы вектора $\boldsymbol{\theta}_n^{avu}$:

$$\mathbf{P}_n^{avu} = \mathbf{K}_n \left(\sum_{i=1}^I \mathbf{C}_{VF}^{CFi} \left[\mathbf{P}_{\varepsilon,n}^i + \mathbf{P}_{int,n}^i + \mathbf{P}_{att,n}^i \right] (\mathbf{C}_{VF}^{CFi})^\top \right) \mathbf{K}_n,$$

где \mathbf{K}_n – весовая матрица, рассчитываемая при решении задачи Вахбы для пучков векторов $\{\mathbf{S}_{VF\ n,r}^{rfc}\}_{r=1}^{R_{ot}^{rfc}}$ и $\{\mathbf{g}_{GCRS\ n,r}\}_{r=1}^{R_{ot}^{GCRS}}$ методом сингулярного разложения [2, 11]; $\mathbf{P}_{\varepsilon,n}^i$, $\mathbf{P}_{int,n}^i$, $\mathbf{P}_{att,n}^i$ – ковариационные матрицы, учитывающие флуктуационные погрешности, погрешности калибровки элементов внутреннего ориентирования и погрешности калибровки относительной ориентации камеры i в составе АВУ.

Матрица приращения ориентации АВУ с учетом погрешностей имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{S}_n^{avu} &\approx \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} - [\boldsymbol{\theta}_{n-1}^{avu} \times] \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} + \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} [\boldsymbol{\theta}_n^{avu} \times] = \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} (\mathbf{I}_3 + [\boldsymbol{\varepsilon}_n^{avu} \times]), \\ \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} &\approx \Delta \mathbf{S}_n^{avu} (\mathbf{I}_3 - [\boldsymbol{\varepsilon}_n^{avu} \times]), \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{avu} = [\varepsilon_{xn}^{avu} \ \varepsilon_{yn}^{avu} \ \varepsilon_{zn}^{avu}]^\top$ – вектор погрешностей расчета приращения ориентации АВУ, определяемый выражением $[\boldsymbol{\varepsilon}_n^{avu} \times] = [\boldsymbol{\theta}_n^{avu} \times] - (\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu})^\top [\boldsymbol{\theta}_{n-1}^{avu} \times] \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu}$. Подставим сюда выражения $\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} \approx \Delta \mathbf{S}_n^{avu} (\mathbf{I}_3 - [\boldsymbol{\varepsilon}_n^{avu} \times])$, выполним почленное перемножение и отбросим слагаемые с порядком малости произведения выше первого. После выполнения этих операций в линейном приближении можно записать: $[\boldsymbol{\varepsilon}_n^{avu} \times] \approx [\boldsymbol{\theta}_n^{avu} \times] - (\Delta \mathbf{S}_n^{avu})^\top [\boldsymbol{\theta}_{n-1}^{avu} \times] \Delta \mathbf{S}_n^{avu}$. Для ортогональной матрицы $\Delta \mathbf{S}_n^{avu}$ существует очевидное равенство

$$(\Delta \mathbf{S}_n^{avu})^\top [\boldsymbol{\theta}_{n-1}^{avu} \times] \Delta \mathbf{S}_n^{avu} = \left[\left((\Delta \mathbf{S}_n^{avu})^\top \boldsymbol{\theta}_{n-1}^{avu} \right) \times \right] (\Delta \mathbf{S}_n^{avu})^\top \Delta \mathbf{S}_n^{avu} = \left[\left((\Delta \mathbf{S}_n^{avu})^\top \boldsymbol{\theta}_{n-1}^{avu} \right) \times \right],$$

отсюда $[\boldsymbol{\varepsilon}_n^{avu} \times] \approx [\boldsymbol{\theta}_n^{avu} \times] - \left[\left((\Delta \mathbf{S}_n^{avu})^\top \boldsymbol{\theta}_{n-1}^{avu} \right) \times \right]$ или $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{avu} \approx \boldsymbol{\theta}_n^{avu} - (\Delta \mathbf{S}_n^{avu})^\top \boldsymbol{\theta}_{n-1}^{avu}$.

Ковариационную матрицу погрешностей расчета приращения ориентации АВУ представим как

$$\mathbf{E}_n^{avu} = \text{cov}\{\boldsymbol{\varepsilon}_n^{avu}\} \approx \mathbf{P}_n^{avu} + (\Delta \mathbf{S}_n^{avu})^\top \mathbf{P}_{n-1}^{avu} \Delta \mathbf{S}_n^{avu}.$$

Для количественной оценки погрешности определения приращения ориентации АВУ используется величина

$$\sigma_{\varepsilon n}^{avu} = \sqrt{\langle (\varepsilon_{xn}^{avu})^2 \rangle + \langle (\varepsilon_{yn}^{avu})^2 \rangle + \langle (\varepsilon_{zn}^{avu})^2 \rangle} = \sqrt{(\sigma_{\varepsilon 11n}^{avu})^2 + (\sigma_{\varepsilon 22n}^{avu})^2 + (\sigma_{\varepsilon 33n}^{avu})^2},$$

где $(\sigma_{\varepsilon 11n}^{avu})^2$, $(\sigma_{\varepsilon 22n}^{avu})^2$, $(\sigma_{\varepsilon 33n}^{avu})^2$ – диагональные элементы матрицы \mathbf{E}_n^{avu} .

4. Калибровка ориентации АВУ относительно ИИМ

4.1. Необходимое условие для выбора калибровочной траектории

Истинные матрицы $\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu}$ и $\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{imu}$ задают один и тот же поворот, но для разных систем координат VF и MF , связанных между собой ортогональным преобразованием с матрицей $\check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF}$. В этом случае справедливо равенство [12] $\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} = (\check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF})^\top \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{imu} \check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF}$ или

$$\mathbf{O}_3 = (\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu})^\top (\check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF})^\top \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{imu} \check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF} - \mathbf{I}_3. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет решение для матрицы $\check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF}$, но оно неоднозначно [13]. Пусть кроме матрицы $\check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF}$ этому уравнению удовлетворяет другая ортогональная матрица

\mathbf{T}_{MF}^{VF} , которую можно записать в виде $\mathbf{T}_{MF}^{VF} = \check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF} \mathbf{Q}$, где \mathbf{Q} – некоторая ортогональная матрица. Подставим \mathbf{T}_{MF}^{VF} в (3) и получим

$$\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} = (\mathbf{T}_{MF}^{VF})^T \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{imu} \mathbf{T}_{MF}^{VF} = \mathbf{Q}^T (\check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF})^T \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{imu} \check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} \mathbf{Q},$$

или $\mathbf{Q} \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} - \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} \mathbf{Q} = \mathbf{O}_3$.

Отношение вида $[\mathbf{Q}, \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu}] \equiv \mathbf{Q} \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} - \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} \mathbf{Q}$ между двумя квадратными матрицами одинакового размера называется коммутатором или скобкой Пуассона [14]. Если коммутатор двух матриц равен нулю, то говорят, что они перестановочны, или коммутируют между собой. Для вычисления \mathbf{T}_{MF}^{VF} необходимо найти матрицу $\mathbf{Q} \neq \mathbf{I}_3$, перестановочную по отношению к $\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu}$.

Приращение ориентации VF можно рассматривать как поворот VF на угол $\check{\varphi}_n^{avu}$ вокруг оси, заданной единичным направляющим вектором $\check{\mathbf{k}}_n^{avu}$. Для определенности со знаком угла $\check{\varphi}_n^{avu}$ и направлением вектора $\check{\mathbf{k}}_n^{avu}$ примем, что $\check{\varphi}_n^{avu} \in [0, 2\pi)$, а сам поворот на угол $\check{\varphi}_n^{avu}$ виден с конца вектора $\check{\mathbf{k}}_n^{avu}$ против часовой стрелки. Столбец координат $\check{\mathbf{k}}_{VF,n}^{avu}$ вектора $\check{\mathbf{k}}_n^{avu}$ относительно VF в момент t_{E_n} является собственным вектором матрицы $\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu}$ с собственным числом, равным 1: $\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} \check{\mathbf{k}}_{VF,n}^{avu} = \check{\mathbf{k}}_{VF,n}^{avu}$, или

$$\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} = \mathbf{I}_3 + \sin \check{\varphi}_n^{avu} [\check{\mathbf{k}}_{VF,n}^{avu} \times] + (1 - \cos \check{\varphi}_n^{avu}) [\check{\mathbf{k}}_{VF,n}^{avu} \times]^2.$$

Из этого равенства видно, что поворот VF вокруг вектора $\check{\mathbf{k}}_n^{avu}$ не изменяет его столбец координат относительно VF : $\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu} \check{\mathbf{k}}_{VF,n}^{avu} = (\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu})^T \check{\mathbf{k}}_{VF,n}^{avu} = \check{\mathbf{k}}_{VF,n}^{avu}$. Если матрица \mathbf{Q} описывает поворот вокруг вектора со столбцом координат $\check{\mathbf{k}}_{VF,n}^{avu}$ на произвольный угол ζ , т.е. представима в виде

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}_3 + \sin \zeta [\check{\mathbf{k}}_{VF,n}^{avu} \times] + (1 - \cos \zeta) [\check{\mathbf{k}}_{VF,n}^{avu} \times]^2,$$

то путем непосредственной проверки можно убедиться, что $[\mathbf{Q}, \Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu}] = \mathbf{O}_3$. Таким образом, уравнение (3) определяет искомую матрицу $\check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF}$ с точностью до произвольного вращения вокруг оси поворота, задаваемой действительным собственным вектором матрицы $\Delta \check{\mathbf{S}}_n^{avu}$.

Теперь можно сформулировать необходимое условие, которому должна удовлетворять калибровочная траектория, где возможно однозначное определение матрицы $\check{\mathbf{C}}_{MF}^{VF}$. Необходимо, чтобы калибровочная траектория содержала как минимум два поворота вокруг осей, имеющих различные направления относительно VF . Под различием направлений здесь понимается несовпадение координатных вектор-столбцов $\check{\mathbf{k}}_{VF,p}^{avu}$ и $\check{\mathbf{k}}_{VF,q}^{avu}$ единичных направляющих векторов $\check{\mathbf{k}}_p^{avu}$ и $\check{\mathbf{k}}_q^{avu}$, задающих оси конечных поворотов АБУ в разные моменты времени t_{E_p} и t_{E_q} .

В соответствии с необходимым условием, отличаться должны только координаты векторов $\check{\mathbf{k}}_p^{avu}$ и $\check{\mathbf{k}}_q^{avu}$ относительно VF . Их можно выразить через матрицы $\check{\mathbf{S}}_{GCRS}^{VF,p-1}$ и $\check{\mathbf{S}}_{GCRS}^{VF,q-1}$ ориентации АБУ относительно $GCRS$ в моменты $t_{E_{p-1}}$ и $t_{E_{q-1}}$ начала соответствующих поворотов. В силу того что конечный поворот VF вокруг вектора не изменяет его координаты относительно VF , запишем:

$$\check{\mathbf{k}}_{VF,p}^{avu} = (\check{\mathbf{S}}_{GCRS}^{VF,p-1})^T \check{\mathbf{k}}_{GCRS,p}^{avu}, \quad \check{\mathbf{k}}_{VF,q}^{avu} = (\check{\mathbf{S}}_{GCRS}^{VF,q-1})^T \check{\mathbf{k}}_{GCRS,q}^{avu},$$

где $\check{\mathbf{k}}_{GCRS,p}^{avu}$, $\check{\mathbf{k}}_{GCRS,q}^{avu}$ – координаты векторов $\check{\mathbf{k}}_p^{avu}$, $\check{\mathbf{k}}_q^{avu}$ относительно $GCRS$. Таким образом, необходимое условие может соблюдаться даже при совпадающих векторах

$\tilde{k}_p^{avu} = \tilde{k}_q^{avu}$ (что эквивалентно $\tilde{\mathbf{k}}_{GCRS,p}^{avu} = \tilde{\mathbf{k}}_{GCRS,q}^{avu}$), если матрицы $\tilde{\mathbf{S}}_{GCRS}^{VF,p-1}$ и $\tilde{\mathbf{S}}_{GCRS}^{VF,q-1}$ оказались такими, что $\tilde{\mathbf{k}}_{VF,p}^{avu} \neq \tilde{\mathbf{k}}_{VF,q}^{avu}$. С другой стороны, при различных векторах $\tilde{k}_p^{avu} \neq \tilde{k}_q^{avu}$ ($\tilde{\mathbf{k}}_{GCRS,p}^{avu} \neq \tilde{\mathbf{k}}_{GCRS,q}^{avu}$) может оказаться, что $\tilde{\mathbf{k}}_{VF,p}^{avu} = \tilde{\mathbf{k}}_{VF,q}^{avu}$, тогда необходимое условие не соблюдено.

Из необходимого условия следует, что система калибровочных уравнений должна содержать минимум два уравнения вида (3), записанные для различных значений координатных столбцов $\tilde{\mathbf{k}}_{VF,n}^{avu}$. Фиксация АИНС в единственной (неизвестной) ориентации и вычисление приращений $\Delta\mathbf{S}_n^{avu}$ и $\Delta\mathbf{S}_n^{imu}$ только за счет вращения Земли нарушает необходимое условие и приводит к вырождению оценки калибруемой матрицы \mathbf{C}_{MF}^{VF} .

Задача синтеза наилучшей в каком-либо смысле калибровочной траектории, удовлетворяющей необходимому условию, в данной работе не ставится и не решается.

4.2. Система уравнений для калибруемых параметров

Калибруемые углы $\boldsymbol{\beta}$ находятся из решения нелинейной матричной системы уравнений, составленной из $N-1$ выражений (3) для всех моментов измерения $n = 2 \dots N$:

$$\begin{cases} \mathbf{O}_3 = (\Delta\mathbf{S}_2^{avu})^T (\mathbf{C}_{MF}^{VF}(\boldsymbol{\beta}))^T \Delta\mathbf{S}_2^{imu} \mathbf{C}_{MF}^{VF}(\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{I}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{O}_3 = (\Delta\mathbf{S}_N^{avu})^T (\mathbf{C}_{MF}^{VF}(\boldsymbol{\beta}))^T \Delta\mathbf{S}_N^{imu} \mathbf{C}_{MF}^{VF}(\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{I}_3 \end{cases} \quad (4)$$

Система уравнений (4) несовместна, так как содержит величины, измеренные с погрешностями. Решить ее возможно нелинейным методом наименьших квадратов (МНК), в ходе которого минимизируется квадратичная целевая функция.

Для построения целевой функции введем функцию невязки

$$\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta}) \equiv [f_{xn}(\boldsymbol{\beta}) \ f_{yn}(\boldsymbol{\beta}) \ f_{zn}(\boldsymbol{\beta})]^T \equiv \mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}, \Delta\mathbf{S}_n^{imu}, \Delta\mathbf{S}_n^{avu}), \quad n = 2 \dots N,$$

между приращениями ориентации MF , вычисленными из измерений ИИМ и АБУ при текущей оценке углов $\boldsymbol{\beta}$:

$$(\Delta\mathbf{S}_n^{avu})^T (\mathbf{C}_{MF}^{VF}(\boldsymbol{\beta}))^T \Delta\mathbf{S}_n^{imu} \mathbf{C}_{MF}^{VF}(\boldsymbol{\beta}) \approx \mathbf{I}_3 + [\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta}) \times]. \quad (5)$$

Для построения функции $\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta})$ сначала рассчитывается матрица \mathbf{F}_n :

$$\mathbf{F}_n \equiv \begin{bmatrix} f_{11n} & f_{12n} & f_{13n} \\ f_{21n} & f_{22n} & f_{23n} \\ f_{31n} & f_{32n} & f_{33n} \end{bmatrix} = (\Delta\mathbf{S}_n^{avu})^T (\mathbf{C}_{MF}^{VF}(\boldsymbol{\beta}))^T \Delta\mathbf{S}_n^{imu} \mathbf{C}_{MF}^{VF}(\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{I}_3.$$

Матрица \mathbf{F}_n согласована с (5), т.е. в пределах линейного приближения мало отличается от кососимметричной матрицы. Чтобы из элементов матрицы $\mathbf{F}_n \approx [\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta}) \times]$ получить кососимметричную матрицу

$$[\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta}) \times] = \begin{bmatrix} 0 & -f_{zn}(\boldsymbol{\beta}) & f_{yn}(\boldsymbol{\beta}) \\ f_{zn}(\boldsymbol{\beta}) & 0 & -f_{xn}(\boldsymbol{\beta}) \\ -f_{yn}(\boldsymbol{\beta}) & f_{xn}(\boldsymbol{\beta}) & 0 \end{bmatrix},$$

необходимо как-то учесть различия во внедиагональных элементах \mathbf{F}_n . Для этого предлагается вычислять значения компонент функции $\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta})$ как средние арифметические внедиагональных элементов \mathbf{F}_n с учетом знаков элементов в кососимметричной матрице векторного произведения $[\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta}) \times]$:

$$\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2} [f_{32n} - f_{23n} \quad f_{13n} - f_{31n} \quad f_{21n} - f_{12n}]^T.$$

Теперь (4) можно переписать в виде

$$\mathbf{f}_\Sigma(\boldsymbol{\beta}) \equiv [\mathbf{f}_2^T(\boldsymbol{\beta}) \quad \mathbf{f}_3^T(\boldsymbol{\beta}) \dots \mathbf{f}_N^T(\boldsymbol{\beta})]^T = \mathbf{o}_{3(N-1)}. \quad (6)$$

Выражение (5) позволяет построить квадратичную целевую функцию

$$e(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{f}_\Sigma^T(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{f}_\Sigma(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{n=2}^N (\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta}))^T \mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta}).$$

Значения $\boldsymbol{\beta}$, при которых $e(\boldsymbol{\beta})$ достигает минимума, рассчитываются итерационным методом Ньютона–Гаусса [15]. Для этого (6) линеаризуется в окрестности оценок $\boldsymbol{\beta}_{j-1} = [\Delta\beta_{\psi,j-1} \quad \Delta\beta_{\vartheta,j-1} \quad \Delta\beta_{\gamma,j-1}]^T$, полученных на предыдущей итерации с номером $j-1$:

$$\mathbf{o}_{3(N-1)} = \mathbf{f}_{\Sigma,j-1} + \mathbf{H}_{j-1} \Delta\boldsymbol{\beta}_j, \quad (7)$$

где $\Delta\boldsymbol{\beta}_j = [\Delta\beta_{\psi,j} \quad \Delta\beta_{\vartheta,j} \quad \Delta\beta_{\gamma,j}]^T$ – вектор поправок к оценке $\boldsymbol{\beta}_{j-1}$; $\mathbf{f}_{\Sigma,j-1} \equiv \mathbf{f}_\Sigma(\boldsymbol{\beta}_{j-1}) = [\mathbf{f}_{2,j-1}^T \dots \mathbf{f}_{N,j-1}^T]^T$; $\mathbf{f}_{n,j-1} \equiv \mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta}_{j-1}) = [f_{xn,j-1} \quad f_{yn,j-1} \quad f_{zn,j-1}]^T$; \mathbf{H}_{j-1} – матрица Якоби, рассчитанная для оценки $\boldsymbol{\beta}_{j-1}$:

$$\mathbf{H}_{j-1} = [\mathbf{h}_{\psi,j-1} \quad \mathbf{h}_{\vartheta,j-1} \quad \mathbf{h}_{\gamma,j-1}],$$

$$\mathbf{h}_{X,j-1} = \frac{\mathbf{f}_\Sigma(\boldsymbol{\beta}_{j-1} + 0.5\mathbf{d}_X) - \mathbf{f}_\Sigma(\boldsymbol{\beta}_{j-1} - 0.5\mathbf{d}_X)}{dx},$$

где $X = \psi, \vartheta, \gamma$; $\mathbf{h}_{X,j-1}$ – значение частной производной $\mathbf{f}_\Sigma(\boldsymbol{\beta})$ по β_X , рассчитанное в точке $\boldsymbol{\beta}_{j-1}$; $\mathbf{d}_\psi = [dx \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{d}_\vartheta = [0 \ dx \ 0]^T$, $\mathbf{d}_\gamma = [0 \ 0 \ dx]^T$; dx – шаг численного дифференцирования.

Оценка $\boldsymbol{\beta}_j$ калибруемых параметров на выходе итерации j рассчитывается из линейного МНК-решения системы уравнений (7):

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\beta}_{j-1} + \Delta\boldsymbol{\beta}_j, \quad \Delta\boldsymbol{\beta}_j = -(\mathbf{H}_{j-1}^T \mathbf{H}_{j-1})^{-1} \mathbf{H}_{j-1}^T \mathbf{f}_{\Sigma,j-1}.$$

Окончательной оценкой $\boldsymbol{\beta}$ вектора калибруемых параметров считается значение $\boldsymbol{\beta} = [\beta_\psi \quad \beta_\vartheta \quad \beta_\gamma]^T \equiv \boldsymbol{\beta}_p$, полученное на выходе итерации J , для которой $\sqrt{\Delta\boldsymbol{\beta}_J^T \Delta\boldsymbol{\beta}_J} \leq 10^{-9}$ радиан.

4.3. Погрешности оценок калибруемых параметров

Значение

$$\mathbf{f}_{\Sigma,J} = [\mathbf{f}_{2,J}^T \quad \mathbf{f}_{3,J}^T \dots \mathbf{f}_{N,J}^T]^T = [f_{x2,J} \quad f_{y2,J} \quad f_{z2,J} \dots f_{xN,J} \quad f_{yN,J} \quad f_{zN,J}]^T$$

функции невязки для $\boldsymbol{\beta}$ отлично от нуля, и используется известный прием [15], в котором ковариационная матрица \mathbf{P}_β погрешностей калибровки $\delta\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}$ рассчитывается по вектору остаточной невязки. В этом приеме векторы $\{\mathbf{f}_{n,J}\}_{n=2}^N$ считаются независимыми, а их компоненты по каждой оси имеют одинаковое распределение с нулевым средним. В таком приближении оценка ковариационной матрицы каждого вектора $\mathbf{f}_{n,J}$ записывается в виде диагональной матрицы размером 3×3 :

$$\mathbf{P}_{S,J}^{rsd} = \frac{1}{N-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Sx,J}^T \mathbf{f}_{Sx,J} & \mathbf{f}_{Sx,J}^T \mathbf{f}_{Sy,J} & \mathbf{f}_{Sx,J}^T \mathbf{f}_{Sz,J} \\ \mathbf{f}_{Sx,J}^T \mathbf{f}_{Sy,J} & \mathbf{f}_{Sy,J}^T \mathbf{f}_{Sy,J} & \mathbf{f}_{Sy,J}^T \mathbf{f}_{Sz,J} \\ \mathbf{f}_{Sx,J}^T \mathbf{f}_{Sz,J} & \mathbf{f}_{Sy,J}^T \mathbf{f}_{Sz,J} & \mathbf{f}_{Sz,J}^T \mathbf{f}_{Sz,J} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{f}_{Sx,J} = [f_{x2,J} \dots f_{xN,J}]^T$, $\mathbf{f}_{Sy,J} = [f_{y2,J} \dots f_{yN,J}]^T$, $\mathbf{f}_{Sz,J} = [f_{z2,J} f_{z3,J} \dots f_{zN,J}]^T$ – значения функции невязок для итерации J , отсортированные по компонентам с одноименными координатами.

Поскольку все векторы $\{\mathbf{f}_{n,J}\}_{n=2}^N$ полагаются независимыми, оценка ковариационной матрицы $\mathbf{P}_{\Sigma,J}^{rsd} = \text{cov}\{\mathbf{f}_{\Sigma,J}\}$ строится как блочно-диагональная матрица размером $3(N-1) \times 3(N-1)$, на главной диагонали которой расположены $N-1$ одинаковых матричных блоков $\mathbf{P}_{S,J}^{rsd}$: $\mathbf{P}_{\Sigma,J}^{rsd} = \text{diag}\{\mathbf{P}_{S,J}^{rsd}, \mathbf{P}_{S,J}^{rsd}, \dots, \mathbf{P}_{S,J}^{rsd}\}$. Теперь ковариационную матрицу \mathbf{P}_{β} можно записать в виде

$$\mathbf{P}_{\beta} = \begin{bmatrix} \sigma_{\beta\psi}^2 & \dots & \dots \\ \vdots & \sigma_{\beta\vartheta}^2 & \vdots \\ \vdots & \dots & \sigma_{\beta\gamma}^2 \end{bmatrix} = (\mathbf{H}_J^T \mathbf{H}_J)^{-1} \mathbf{H}_J^T \mathbf{P}_{\Sigma,J}^{rsd} \mathbf{H}_J (\mathbf{H}_J^T \mathbf{H}_J)^{-1},$$

где $\sigma_{\beta\psi}$, $\sigma_{\beta\vartheta}$, $\sigma_{\beta\gamma}$ – СКП калибровки углов ориентации АБУ относительно ИИМ. Результатами калибровки ориентации АБУ относительно ИИМ являются значение β и его ковариационная матрица \mathbf{P}_{β} .

5. Погрешность вычисления ориентации ИИМ из ориентации АБУ

АБУ применяется в составе АИНС для определения ориентации MF относительно звезд. Поскольку система координат АИНС совпадает с MF , именно из этой ориентации рассчитываются навигационные параметры для коррекции нарастающих погрешностей инерциальной навигации. Для правильного выполнения коррекции в корректирующий алгоритм должны передаваться не только параметры ориентации MF , но и значения погрешностей, с которыми эти параметры определены.

Матрица $\mathbf{C}_{MF}^{VF} \equiv \mathbf{R}_{\psi}(\beta_{\psi})\mathbf{R}_{\vartheta}(\beta_{\vartheta})\mathbf{R}_{\gamma}(\beta_{\gamma})$ ориентации VF относительно MF рассчитывается из результатов калибровки с погрешностью в виде вектора θ^{clb} малого поворота:

$$\mathbf{C}_{MF}^{VF} \approx \tilde{\mathbf{C}}_{MF}^{VF} (\mathbf{I}_3 + [\theta^{clb} \times]).$$

На рис. 1, в [1] показана возможная конфигурация камер в составе АБУ, из которой видно, что углы β в общем случае нельзя считать малыми и $\theta^{clb} \neq \delta\beta$. Для расчета θ^{clb} необходимо учесть, что повороты на углы β выполняются последовательно вокруг разных осей:

$$\theta^{clb} = \mathbf{D}_1 \delta\beta, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \sin\beta_{\gamma} \cos\beta_{\vartheta} & \cos\beta_{\gamma} & 0 \\ -\sin\beta_{\vartheta} & 0 & 1 \\ -\cos\beta_{\gamma} \cos\beta_{\vartheta} & \sin\beta_{\gamma} & 0 \end{bmatrix}.$$

В результате очередного астрономического измерения получаем матрицу \mathbf{S}_{GCRS}^{VF} ориентации АБУ и ковариационную матрицу \mathbf{P}^{avu} погрешностей измерения. Матрица $\tilde{\mathbf{S}}_{GCRS}^{MF}$ ориентации MF относительно звезд вычисляется из матриц \mathbf{S}_{GCRS}^{VF} и \mathbf{C}_{MF}^{VF} :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{S}}_{GCRS}^{MF} &= \mathbf{S}_{GCRS}^{VF} (\mathbf{C}_{MF}^{VF})^T = \tilde{\mathbf{S}}_{GCRS}^{MF} (\mathbf{I}_3 + [\boldsymbol{\theta}^{mfa} \times]) = \tilde{\mathbf{S}}_{GCRS}^{VF} (\mathbf{I}_3 + [\boldsymbol{\theta}^{avu} \times]) (\mathbf{I}_3 - [\boldsymbol{\theta}^{clb} \times]) (\tilde{\mathbf{C}}_{MF}^{VF})^T = \\ &= \tilde{\mathbf{S}}_{GCRS}^{MF} \left(\mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{C}}_{MF}^{VF} [(\boldsymbol{\theta}^{avu} - \boldsymbol{\theta}^{clb}) \times] (\tilde{\mathbf{C}}_{MF}^{VF})^T \right) = \tilde{\mathbf{S}}_{GCRS}^{MF} \left(\mathbf{I}_3 + \left[(\tilde{\mathbf{C}}_{MF}^{VF} (\boldsymbol{\theta}^{avu} - \boldsymbol{\theta}^{clb})) \times \right] \right),\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\theta}^{mfa}$ – вектор малого поворота, описывающий погрешности вычисления ориентации MF из измерений АБУ. Замена $\tilde{\mathbf{C}}_{MF}^{VF}$ на \mathbf{C}_{MF}^{VF} дает возможность записать формулу для линейного приближения этого вектора:

$$\boldsymbol{\theta}^{mfa} \approx \mathbf{C}_{MF}^{VF} (\boldsymbol{\theta}^{avu} - \boldsymbol{\theta}^{clb}) = \mathbf{C}_{MF}^{VF} \boldsymbol{\theta}^{avu} - \mathbf{C}_{MF}^{VF} \mathbf{D}_1 \delta \boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}_{MF}^{VF} \boldsymbol{\theta}^{avu} - \mathbf{D}_2 \delta \boldsymbol{\beta},$$

$$\text{где } \mathbf{D}_2 = \mathbf{C}_{MF}^{VF} \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \cos \beta_\psi & \cos \beta_\vartheta \sin \beta_\psi \\ 0 & -\sin \beta_\psi & \cos \beta_\vartheta \cos \beta_\psi \\ -1 & 0 & \sin \beta_\vartheta \end{bmatrix}.$$

Ковариационная матрица погрешностей вычисления ориентации ИИМ из измерений ориентации АБУ с учетом погрешностей калибровки имеет вид:

$$\mathbf{P}^{mfa} = \text{cov} \{ \boldsymbol{\theta}^{mfa} \} = \mathbf{C}_{MF}^{VF} \mathbf{P}^{avu} (\mathbf{C}_{MF}^{VF})^T + \mathbf{P}^{clb}, \quad (8)$$

где $\mathbf{P}^{clb} = \mathbf{D}_2 \mathbf{P}_\beta \mathbf{D}_2^T$ – постоянная ковариационная матрица погрешностей калибровки ориентации VF относительно MF , преобразованная в систему координат MF .

6. Экспериментальные результаты

Калибровка ориентации VF относительно MF (или АБУ относительно ИИМ) выполнялась по тому же набору измерений, что и калибровка относительной ориентации камер в составе АБУ [1]. Для обработки измерений использовались результаты калибровки, полученные в [1] для эпох измерений АБУ с номерами $n = 1 \dots N$, $N = 73$: пучки $\{\mathbf{g}_{GCRS}^i\}_{n=1}^{R_n^i}$ направляющих векторов распознанных звезд, пучки $\{\mathbf{s}_{CF}^i\}_{n=1}^{R_n^i}$ направляющих векторов распознанных звезд, в которых учтены элементы внутреннего ориентирования камер, углы ориентации $\{\boldsymbol{\psi}_n^{avu}\}_{n=1}^N$ VF относительно ENU . Среднее значение интервала времени между эпохами измерения АБУ составляет $\langle \Delta t_E \rangle = (N-1)^{-1} \sum_{n=2}^N (t_{En} - t_{En-1}) \approx 21$ сек. Среднее количество звезд $\langle R^{tot} \rangle$, обнаруженных всеми камерами АБУ в одном измерении, $-\langle R^{tot} \rangle = N^{-1} \sum_{n=1}^N R_n^{tot} \approx 108$. Углы $\boldsymbol{\alpha}^2$ и $\boldsymbol{\alpha}^3$ (углы $\boldsymbol{\alpha}^1 \equiv \mathbf{0}_3$) относительной ориентации камер калибруются в [1] с расчетной СКП не более $2''$. Расчетная СКП калибровки отдельных углов вычисляется из диагональных элементов ковариационных матриц \mathbf{P}_α^2 , \mathbf{P}_α^3 , ($\mathbf{P}_\alpha^1 \equiv \mathbf{O}_3$), также получаемых в результате калибровки. Углы ориентации $\{\boldsymbol{\psi}_n^{avu}\}_{n=1}^N$ калибруются с расчетной СКП не более $1''$.

Ориентация АБУ калибровалась относительно ИИМ со следующими параметрами: $T_{IMU} = 0,005$ с, $\sigma_{\phi G} = 3''$, $\sigma_{kG} = 1 \times 10^{-5}$, $\sigma_{wG} = 0,0012$ °/√ч. Численное значение σ_{bG} складывается из двух значений – нестабильности смещения нуля от пуска к пуску $0,005$ °/ч и дрейфа в запуске $0,005$ °/ч: $\sigma_{bG} = 0,005 \times \sqrt{2} = 0,007$ °/ч.

В ходе калибровочных расчетов из углов $\{\boldsymbol{\psi}_n^{avu}\}_{n=1}^N$ были получены матрицы $\{\mathbf{S}_{VF}^{ENU}\}_{n=1}^N$ ориентации АБУ относительно Земли. Результаты калибровки в виде матрицы \mathbf{C}_{MF}^{VF} позволяют вычислить матрицы ориентации АИНС относительно Земли $\mathbf{S}_{ENU}^{MF} = (\mathbf{C}_{MF}^{VF} \mathbf{S}_{VF}^{ENU})^T$, из которых согласно [1, формула (2)] рассчитываются углы ориентации АИНС относительно Земли $\boldsymbol{\psi}_n^{imu} = [\psi_n^{imu} \ \vartheta_n^{imu} \ \gamma_n^{imu}]^T$, $n = 1 \dots N$. Графики

этих углов показаны на рис. 1, а. Калибруемая АИНС поворачивалась по углам курса $50^\circ < \psi_n^{imu} < 300^\circ$, тангажа $-7^\circ < \vartheta_n^{imu} < 7^\circ$, крена $-15^\circ < \gamma_n^{imu} < 15^\circ$. Калибровочная траектория содержит 12 статических участков и 12 поворотов АИНС на угол более $0,5^\circ$. Моменты завершения поворотов (из предыдущего положения) на рис. 1, а выделены пронумерованными черными маркерами. Номера маркеров соответствуют номерам пучков с близкими координатами направляющих векторов относительно VF .

Калибровочной траектории на рис. 1, а соответствует пучок направляющих векторов $\{\mathbf{k}_{VF,n}^{avu}\}_{n=2}^N$, вычисленных из матриц $\{\Delta \mathbf{S}_n^{avu}\}_{n=2}^N$ и задающих направления осей приращения ориентации АВУ. Этот пучок показан на рис. 1, б, на котором цветными стрелками выделены оси поворота АИНС на углы более $0,5^\circ$, а серыми – оси поворота на все остальные углы (в статических положениях за счет вращения Земли $\langle \Delta t_E \rangle \times 15''/\text{сек} \approx 315'' \approx 0,09^\circ$). Все оси поворотов группируются в 12 пучков с близкими значениями координат в вектор-столбцах $\mathbf{k}_{VF,n}^{avu}$. Из рисунка видно, что из 12 поворотов АИНС только три обуславливают систему калибровочных уравнений. Пучки направляющих векторов, сгруппированных вокруг этих поворотов, пронумерованы от 1 до 3. Все остальные повороты дают только статистическое усреднение случайных погрешностей измерений.

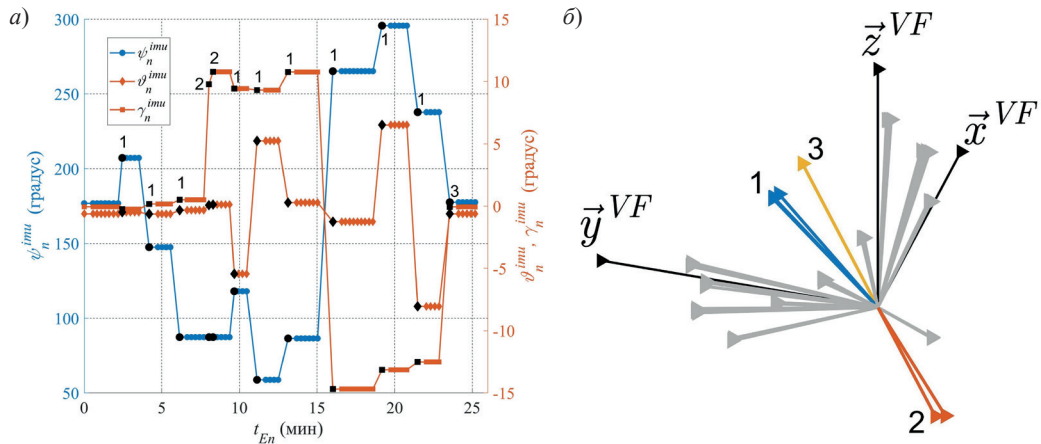


Рис. 1. Траектория ориентации АИНС относительно Земли во время калибровки (черными маркерами и номерами обозначены моменты приращения ориентации АИНС на угол больше $0,5^\circ$): а) углы курса, крена и тангажа АИНС; б) направляющие векторы осей приращения ориентации АВУ

Угол поворота, задаваемый матрицей $\Delta \mathbf{S}_n^X$, $X = avu, imu$ приращения ориентации:

$$\varphi_n^X = \arccos\left(\frac{\text{tr}(\Delta \mathbf{S}_n^X) - 1}{2}\right), X = avu, imu.$$

На рис. 2, а показан график разности $\varphi_n^{avu} - \varphi_n^{imu}$. Случайные колебания этой разности обусловлены погрешностями измерения АВУ и ИИМ, а значительные выбросы, скорее всего, связаны с какими-то эффектами, не учтенными в калибруемой модели измерений. На график разности наложен график сводной погрешности расчета приращений ориентации АИНС:

$$\sigma_{\varepsilon_n}^{ains} = \sqrt{(\sigma_{\varepsilon_n}^{avu})^2 + (\sigma_{\varepsilon_n}^{imu})^2}.$$

Чтобы проверить устойчивость алгоритма решения системы калибровочных уравнений, было задано грубое начальное приближение $\beta_0 = \mathbf{o}_3$. На рис. 2, б показаны гра-

фики для функций остаточных невязок $\mathbf{f}_{S_{x,J}}, \mathbf{f}_{S_{y,J}}, \mathbf{f}_{S_{z,J}}$ отсортированных по одноименным координатам, на выходе из последней итерации. Несмотря на грубость начального приближения, итерационный алгоритм сошелся к установившемуся значению оцениваемых параметров, при котором в остаточных невязках отсутствует видимое смещение нуля. Аномальные выбросы в остаточных невязках наблюдаются в тех же местах, что и на рис. 2, а.

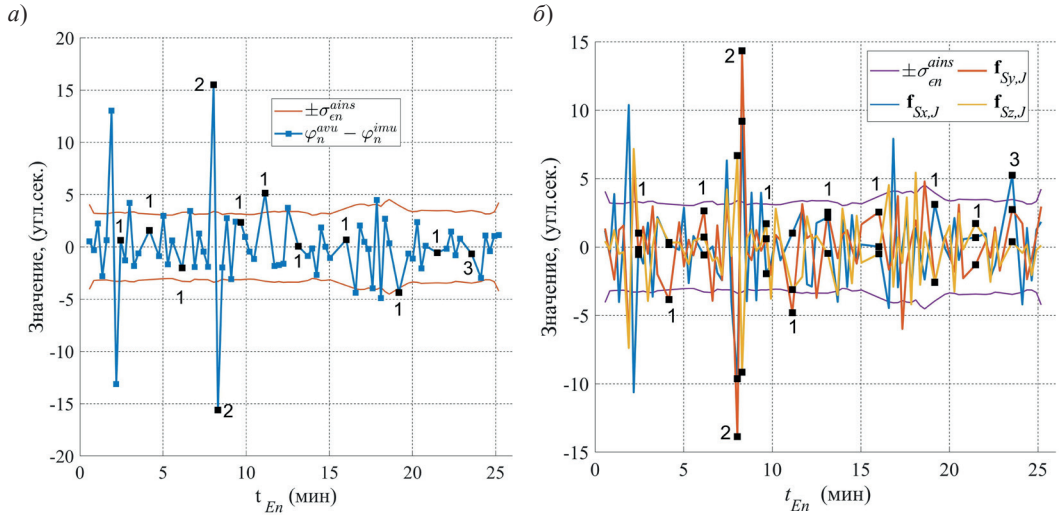


Рис. 2. Погрешности в приращениях ориентации до и после калибровки (черными маркерами выделены моменты приращения ориентации АИНС на угол больше $0,5^\circ$):
 а) разности между углами конечного поворота, вычисленными из синхронных матриц приращения ориентации АВУ и ИИМ до калибровки;
 б) остаточные невязки в приращениях ориентации АВУ и ИИМ после калибровки

В результате эксперимента были определены следующие СКП углов β , рассчитанные из диагональных элементов ковариационной матрицы \mathbf{P}_β : $\sigma_{\beta_{\text{в}}} = 6,0''$, $\sigma_{\beta_{\text{г}}} = 0,6''$, $\sigma_{\beta_{\text{г}}} = 0,6''$. Такая разница характерна для работы любого астродатчика с широким полем зрения: угол поворота вокруг оси симметрии поля зрения (в данном случае поворот АВУ вокруг оси \vec{z}^{MF} , см. рис. 1 [1]) всегда измеряется с большей погрешностью, чем углы наклона поля зрения (или повороты вокруг осей \vec{x}^{MF} , \vec{y}^{MF}).

Практическое применение результатов калибровки можно продемонстрировать при помощи результатов промежуточных вычислений, а именно наборов матриц $\{\Delta \mathbf{S}_n^{imu}\}_{n=2}^N$, $\{\mathbf{S}_{GCRS,n}^{VF}\}_{n=1}^N$ и $\{\mathbf{P}_n^{avu}\}_{n=1}^N$. Ориентация ИИМ относительно $GCRS$ определяется по измерениям АВУ через матрицу \mathbf{C}_{MF}^{VF} результатов калибровки: $\tilde{\mathbf{S}}_{GCRS,n}^{MF} = \mathbf{S}_{GCRS,n}^{VF} (\mathbf{C}_{MF}^{VF})^T$, $n = 1 \dots N$. Ковариационная матрица \mathbf{P}_n^{ifa} этой оценки рассчитывается из выражения (8).

Если использовать матрицу $\mathbf{S}_{GCRS,1}^{VF}$ для начальной выставки ориентации ИИМ относительно $GCRS$, т.е. $\mathbf{S}_{GCRS,1}^{MF} = \mathbf{S}_{GCRS,1}^{VF}$, то во все остальные моменты времени $n = 2 \dots N$ ориентация ИИМ относительно $GCRS$ вычисляется путем интегрирования измерений гироскопов: $\mathbf{S}_{GCRS,n}^{MF} = \mathbf{S}_{GCRS,n-1}^{MF} \Delta \mathbf{S}_n^{imu}$, $n = 2 \dots N$. Погрешность $\mathbf{0}_n^{imu}$ определения ориентации: $\mathbf{S}_{GCRS,n}^{MF} \approx \tilde{\mathbf{S}}_{GCRS,n}^{MF} (\mathbf{I}_3 + [\mathbf{0}_n^{imu} \times])$.

Для расчета ковариационной матрицы $\mathbf{P}_n^{imu} \equiv \text{cov}\{\mathbf{0}_n^{imu}\}$ сначала найдем ковариационную матрицу величины, полученной интегрированием измерений гироскопов, по аналогии с (2):

$$\mathbf{P}^{imu}(t_{l_k}) \approx (\mathbf{I}_3 - [\boldsymbol{\rho}_k \times]) \mathbf{P}^{imu}(t_{l_{k-1}})(t_{l_{k-1}})(\mathbf{I}_3 + [\boldsymbol{\rho}_k \times]) + \mathbf{P}_{\rho k}, \quad \mathbf{P}^{imu}(t_{l_0}) = \mathbf{O}_3.$$

Здесь начальный момент времени t_{l_0} выбирается из условия $t_{l_0} \leq t_{E_0} < t_{l_1}$. Для демонстрационных целей матрицу \mathbf{P}_n^{imu} можно рассчитать посредством простой линейной интерполяции:

$$\mathbf{P}_n^{imu} \approx \frac{t_{E_n} - t_{l_{k-1}}}{T_{IMU}} \mathbf{P}^{imu}(t_{l_k}) + \frac{t_{l_k} - t_{E_n}}{T_{IMU}} \mathbf{P}^{imu}(t_{l_{k-1}}), \quad t_{l_{k-1}} \leq t_{E_n} < t_{l_k}.$$

Эта матрица заведомо симметрична и положительно определена.

Различие между матрицами $\mathbf{S}_{GCRS,n}^{MF}$ и $\tilde{\mathbf{S}}_{GCRS,n}^{MF}$ описывается вектором малого поворота $\boldsymbol{\theta}_n^{diff} = [\theta_{xn}^{diff} \ \theta_{yn}^{diff} \ \theta_{zn}^{diff}]^T \approx \boldsymbol{\theta}_n^{mfa} - \boldsymbol{\theta}_n^{imu}$,

$$[\boldsymbol{\theta}_n^{diff} \times] \approx (\mathbf{S}_{GCRS,n}^{MF})^T \tilde{\mathbf{S}}_{GCRS,n}^{MF} - \mathbf{I}_3$$

с ковариационной матрицей $\mathbf{P}_n^{diff} \approx \mathbf{P}_n^{imu} + \mathbf{P}_n^{mfa}$. Графики компонент вектора $\boldsymbol{\theta}_n^{diff}$ показаны на рис. 3. На этот же график наложены графики оценок различия между матрицами ориентации σ_n^{diff} , погрешности измерения ориентации АБУ σ_n^{avu} и погрешности расчета ориентации ИИМ из измерений ориентации АБУ σ_n^{mfa} :

$$\sigma_n^X = \sqrt{(\sigma_{11n}^X)^2 + (\sigma_{22n}^X)^2 + (\sigma_{33n}^X)^2}, \quad X = diff, avu, mfa,$$

где $(\sigma_{11n}^X)^2$, $(\sigma_{22n}^X)^2$, $(\sigma_{33n}^X)^2$ – диагональные элементы матрицы \mathbf{P}_n^X .

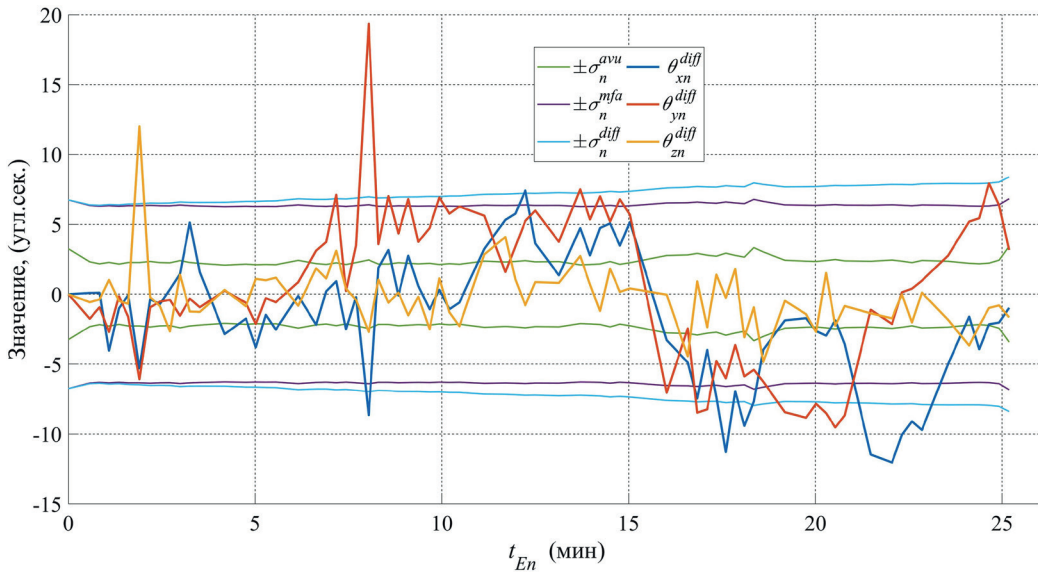


Рис. 3. Компоненты вектора малого поворота, описывающего различие между результатами инерциальногочисления и астрономического измерения ориентации ИИМ во время калибровки

Из этих графиков видно, что компоненты вектора $\boldsymbol{\theta}_n^{diff}$ не содержат систематических составляющих и хорошо ложатся в расчетные интервалы оценок среднеквадратичных погрешностей. Т.е. рассматриваемого набора калибровочных измерений оказывается достаточно для идентификации параметров выбранной модели измерений АИНС с приемлемой для практики точностью.

Заключение

Предложенный алгоритм астрономической калибровки АИНС состоит из двух этапов. На первом калибруются параметры относительной ориентации и элементы внутреннего ориентирования цифровых камер в составе АБУ, на втором – параметры ориентации АБУ относительно ИИМ. Значения калибруемых параметров на обоих этапах калибровочной процедуры получаются из одного и того же набора калибровочных измерений. Такой подход позволяет определить фактические температурно-зависимые параметры конструкции АБУ на первом этапе, а затем использовать эти значения для уменьшения систематических погрешностей на втором этапе.

Ключевой проблемой для реализации предложенного алгоритма является выбор траектории калибровочных поворотов АИНС. Она должна обеспечивать получение такого набора калибровочных измерений, при котором системы уравнений для определения калибруемых параметров в процессе реализации алгоритма имеют однозначные МНК-решения (не вырождаются).

К этой траектории предъявляются противоречивые требования. С одной стороны, она должна содержать статические участки, чтобы все наблюдаемые звезды экспонировались с минимальным смазом. В этом случае уменьшается систематическая погрешность измерения координат направляющих векторов обнаруженных звезд. С другой стороны, необходимо, чтобы в траекторию входила специально подобранная последовательность поворотов на значительные углы порядка $10-15^\circ$. Эти повороты улучшают качество калибровки элементов внутреннего ориентирования на первом этапе процедуры и позволяют однозначно определить значения калибруемых параметров на втором. С третьей стороны, второй этап калибровочной процедуры предполагает неизменность погрешностей коррекции масштабных коэффициентов, углов перекосов и смещений нулей гироскопов. В связи с этим продолжительность траектории во времени должна быть достаточно короткой, чтобы реальный дрейф этих параметров не влиял на результаты калибровки.

Перечисленные противоречивые требования открывают пути для различных вариантов многокритериальной оптимизации калибровочных траекторий. Эта задача в настоящей работе не рассматривалась. Экспериментальная траектория была выбрана случайным образом из соображений удобства оператора и оказалась удачной, поскольку позволила обеспечить СКП калибровки относительной ориентации камер в составе АБУ порядка $2''$ и СКП калибровки ориентации АБУ относительно ИИМ порядка $6''$.

При получении МНК-решений систем уравнений в ходе калибровочной процедуры всем измерениям присваивались одинаковые веса. Возможно, вычисление весовых матриц, основанное на ковариационных матрицах погрешностей изменения направляющих векторов звезд на первом этапе и на ковариационных матрицах поворотов ориентации на втором, позволит уменьшить расчетные СКП оценки калибруемых параметров. Этот подход здесь не применялся, и МНК-решения получены для единичных весовых матриц.

Для комплексирования инерциальных и астрономических измерений с помощью методов квазиоптимальной фильтрации необходимо вместе с астрономическими измерениями ориентации ИИМ получать ковариационные матрицы погрешностей этих измерений. Разработанная здесь модель погрешностей астрономического опре-

деления ориентации ИИМ учитывает ковариационные матрицы погрешностей калибровки АИНС. Ковариационные матрицы рассчитываются в результате обработки калибровочных измерений совместно с численными значениями калибруемых параметров. Рекомендуется сохранять эти матрицы вместе с результатами калибровки, чтобы использовать их для расчета погрешностей астрономического определения ориентации ИИМ в реальном времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Василюк Н.Н., Нефедов Г.А., Сидорова Е.А., Шагимуратова Н.О.** Астрономическая калибровка бесплатформенной астроинерциальной навигационной системы. Часть 1: Калибровка относительной ориентации цифровых камер // *Гирскопия и навигация*. 2024. Том 32. №2 (125). С. 66–84. EDN IDPTKO.
2. **Василюк Н.Н.** Модель погрешностей звездного датчика ориентации, учитывающая погрешности калибровки элементов внутреннего ориентирования цифровой камеры // *Гирскопия и навигация*. 2024. Том 32. №1 (124). С. 53–71. EDN: PSOUYI.
3. **Козлов А.В., Парусников Н.А., Вавилова Н.Б., Тарьгин И.Е., Голован А.А.** Динамическая стендовая калибровка бескарданных инерциальных навигационных систем в сборе // *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2018. № 1 (195). С. 241–257. DOI 10.23683/2311-3103-2018-1-241-257. EDN OSAWTV.
4. **Болотнов А.С.** Применение лазерного гироскопа в бесплатформенных инерциальных системах // *Политехнический молодежный журнал*. 2019. № 10(39). С. 10. DOI 10.18698/2541-8009-2019-10-533. EDN VKBBBBF.
5. **Емельянец Г.И., Степанов А.П., Блажнов Б.А.** О начальной выставке и оценке погрешностей измерительного модуля БИНС с использованием спутниковых фазовых измерений // *Гирскопия и навигация*. 2019. Т. 27. № 1(104). С. 47–60. DOI 10.17285/0869-7035.2019.27.1.047-060. EDN ZGJLJO.
6. **Василюк Н.Н.** Субпиксельное накопление и обнаружение смазанных изображений звезд, полученных астроинерциальным датчиком ориентации на фоне дневного неба // *Компьютерная оптика*. 2024. Т. 48. № 2. С. 303–311. DOI 10.18287/2412-6179-CO-1309. EDN FTWLKD.
7. **Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.** Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
8. **Емельянец Г.И., Степанов А.П.** Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации. СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. 394 с.
9. **Василюк Н.Н.** Векторная коррекция скоростной абберации для внутритмосферного звездного датчика ориентации // *Авиакосмическое приборостроение*. 2022. № 10. С. 17–31. DOI 10.25791/aviakosmos.10.2022.1302. EDN CQYWHW.
10. **Василюк Н.Н.** Векторная коррекция атмосферной рефракции для внутритмосферного звездного датчика ориентации // *Авиакосмическое приборостроение*. 2022. № 9. С. 31–44. DOI 10.25791/aviakosmos.9.2022.1299. EDN VFGMCC.
11. **Markley, F.L.**, Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition, *Journal of The Astronautical Sciences*, 1988, vol. 36, no. 3, pp. 245–258.
12. **Беклемишев Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2005. 304 с.
13. **Кирпичников С.Н., Новоселов В.С.** Математические аспекты кинематики твердого тела: учеб. пособие. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1986. 252 с.
14. **Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я.** Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматгиз, 1958. 368 с.
15. **Мудров В.И., Кушко В.Л.** Методы обработки измерений. Квазиравнодоподобные оценки; изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1983. 304 с.

Vasilyuk, N.N. (SPC Elektrooptika, LLC, Moscow), **Nefedov, G.A.**, **Sidorova, E.A.**, **Shagimuratova, N.O.** (Ramensky Instrument Engineering Plant, Ramenskoye)

Astronomic Calibration of a Strapdown Astroinertial Navigation System. Part 2: Calibration of the Mutual Attitude of Inertial and Astronomical Sensors, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2024, vol. 32. no. 3, pp. 66–85.

Abstract. Astronomical calibration is defined as determination of the constant attitude of digital cameras relative to the inertial measurement unit using ground-based star observations. The first part of this paper [1] focuses on the calibration of relative attitude of all cameras, which provides combination of their separate measurements into the observations of one virtual camera. The second part examines the calibration of virtual camera attitude relative to the inertial measurement unit (IMU). The calibration is performed on a simple test bench, which is unable to set the accurate attitude of the calibrated unit relative to the stars. Therefore, the calibrated parameters are estimated by the attitude increments over a time period between the astronomical measurements. Formulas for calculating the attitude increments from the inertial and astronomical measurements and their covariance matrices have been obtained. It has been shown that not all calibration trajectories provide unambiguous estimation of the calibrated parameters based on the attitude increments. The necessary condition for selecting the required trajectories has been formulated. The formula for finding the error covariance matrix of IMU attitude by the astronomical measurements has been received. This formula considers the star configuration observed with the virtual camera, its calibration errors described in the first part of the paper, and calibration errors in its attitude relative to the IMU obtained in the second part. The RMS error of the attitude calibration is experimentally found to be about 6 arcsec.

Key words: star tracker, calibration, strapdown astroinertial navigation system, attitude increment, error model.

Материал поступил 18.03.2024